

**Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Leis dos Cossenos e dos Senos,
Polígonos Regulares**

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos - Parte 3

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

3 de julho de 2018



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 A Relação de Stewart

O objetivo desse material é utilizar a Lei dos Cossenos para demonstrar e exibir algumas aplicações do resultado a seguir, o qual é conhecido como a **Relação de Stewart**.

Teorema 1. *Seja ABC um triângulo cujos lados AB , AC e BC medem, respectivamente, c , b e a . Se D é um ponto sobre o lado BC , tal que $\overline{BD} = m$, $\overline{CD} = n$ e $\overline{AD} = x$, então*

$$b^2m + c^2n = a(x^2 + mn). \quad (1)$$

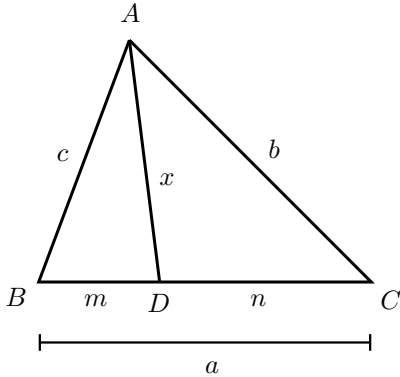
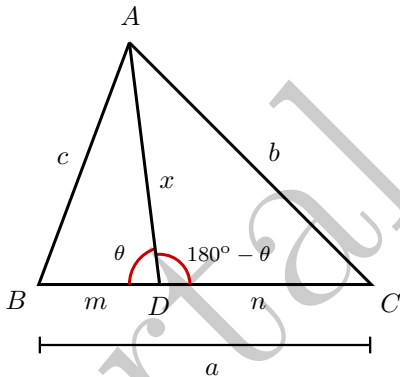


Figura 1: a relação de Stewart.

Prova. Denotando $\widehat{ADB} = \theta$, temos $\widehat{ADC} = 180^\circ - \theta$ (veja a figura abaixo).



Aplicando a Lei dos cossenos ao triângulo ABD , obtemos:

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2xm \cos \theta.$$

Daí, segue que

$$\cos \theta = \frac{x^2 + m^2 - c^2}{2xm} \quad (2)$$

Agora, lembrando que $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, aplicamos a Lei dos Cossenos ao triângulo ACD para obter:

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + n^2 - 2xn \cos(180^\circ - \theta) \\ &= x^2 + n^2 + 2nx \cos \theta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos \theta = \frac{b^2 - x^2 - n^2}{2xn}. \quad (3)$$

Igualando as expressões (2) e (3) para $\cos \theta$, chegamos à igualdade

$$\frac{x^2 + m^2 - c^2}{2xm} = \frac{b^2 - x^2 - n^2}{2xn},$$

ou seja,

$$n(x^2 + m^2 - c^2) = m(b^2 - x^2 - n^2).$$

Então, distribuindo os produtos em ambos os membros da igualdade acima e usando o fato de que $m + n = a$, um pouco de álgebra elementar fornece, sucessivamente,

$$nx^2 + nm^2 - nc^2 = mb^2 - mx^2 - mn^2$$

$$nx^2 + mx^2 + nm^2 + mn^2 = mb^2 + nc^2$$

$$b^2m + c^2n = (m+n)x^2 + (m+n)mn$$

$$b^2m + c^2n = ax^2 + amn$$

$$b^2m + c^2n = a(x^2 + mn).$$

□

Observação 2. *Veja que a fórmula (1) pode ser reescrita como*

$$x^2 = \frac{b^2m + c^2n}{a} - mn.$$

Se o ângulo $\angle BAC$ for reto e x for a altura de ABC relativa ao lado BC (que será a hipotenusa), então, nas notações da figura 1, as relações métricas em triângulos retângulos fornecem

$$b^2 = an \quad \text{e} \quad c^2 = am.$$

Assim, a Relação de Stewart pode ser escrita como

$$x^2 = \frac{anm + amn}{a} - mn = \frac{2amn}{a} - mn = mn,$$

fórmula que também já conhecemos do estudo de relações métricas em triângulos retângulos.

A seguir, mostraremos como é possível calcular as medidas de algumas cevianas de um triângulo dado, utilizando a Relação de Stewart.

Exemplo 3. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Denotando por M o ponto médio do lado BC , temos que a medida m_A da mediana AM é dada, em função de a , b e c , pela fórmula:*

$$m_A = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}.$$

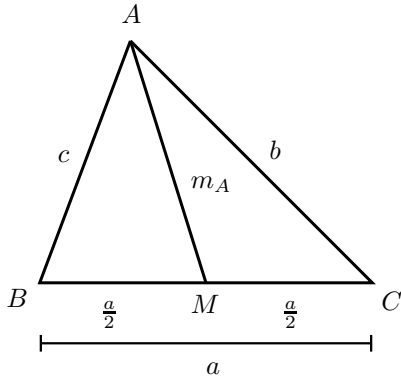


Figura 2: calculando as medianas.

Prova. Com as notações da figura acima, aplicando a Relação de Stewart ao triângulo ABC , obtemos:

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} = a \left(m_A^2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \right).$$

Cancelando um fator a em ambos os membros, ficamos com a igualdade

$$\frac{1}{2} (b^2 + c^2) = m_A^2 + \frac{a^2}{4},$$

de sorte que

$$m_A^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Portanto,

$$m_A = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}.$$

□

Vale observar que fórmulas análogas valem para as medianas m_B e m_C relativas aos vértices B e C do triângulo ABC , respectivamente. Mais precisamente, temos:

$$m_B = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}$$

e

$$m_C = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}.$$

Exemplo 4. Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sejam, ainda, m_A , m_B e m_C os comprimentos das medianas relativas aos vértices A , B e C , respectivamente. Mostre que

$$\frac{m_A^2 + m_B^2 + m_C^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}.$$

Prova. Utilizando as fórmulas dadas no Exemplo 3 e observação subsequente, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{m_A^2 + m_B^2 + m_C^2}{a^2 + b^2 + c^2} &= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4(a^2 + b^2 + c^2)} + \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &\quad + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2}{4(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &\quad + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5. Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Se AD é a bissetriz interna relativa ao vértice A e $b_A = \overline{AD}$, então vale a fórmula:

$$b_A = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}, \quad (4)$$

em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro de ABC .

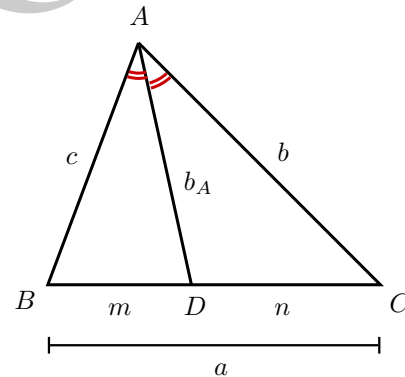


Figura 3: calculando as bissetrizes internas.

Prova. Denotando $\overline{BD} = m$, $\overline{CD} = n$ e invocando o Teorema da Bissetriz Interna, temos:

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b}.$$

Mas, como $a = m + n$, temos $n = a - m$, de sorte que, a partir da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{m}{c} = \frac{a-m}{b} &\implies bm = ac - mc \\ &\implies bm + cm = ac \\ &\implies m(b+c) = ac \\ &\implies m = \frac{ac}{b+c}. \end{aligned} \quad (5)$$

Substituindo essa expressão para m na relação $n = a - m$, chegamos a:

$$n = \frac{ab}{b+c}. \quad (6)$$

Agora, aplicando a Relação de Stewart ao triângulo ABC e utilizando as fórmulas (5) e (6), obtemos sucessivamente:

$$b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} + c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} = a \left(b_A^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \right)$$

$$\frac{ab^2c + abc^2}{b+c} = a \left(b_A^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \right)$$

$$\frac{abc(b+c)}{b+c} = a \left(b_A^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \right)$$

$$bc = b_A^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Então, utilizando novamente um pouco de álgebra elementar, temos:

$$\begin{aligned} b_A^2 &= bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \\ &= \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot [(b+c)^2 - a^2] \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot (b+c+a) \cdot (b+c-a) \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 2p \cdot (2p-2a) \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 4p(p-a). \end{aligned}$$

Por fim, extraindo raízes quadradas em ambos os membros da igualdade

$$b_A^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 4p(p-a),$$

chegamos a (4). \square

Como no caso das medianas, o leitor deve perceber que há fórmulas análogas para os comprimentos b_B e b_C das bissetrizes internas relativas aos vértices B e C de ABC , respectivamente:

$$b_B = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}$$

e

$$b_C = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}.$$

Terminamos este material discutindo, no exemplo a seguir, o análogo do exemplo anterior para bissetrizes externas. Nesse caso, porém, observe que temos uma suposição adicional.

Exemplo 6. Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, e tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Se AD é a bissetriz externa relativa ao vértice A e $e_A = \overline{AD}$, então vale a fórmula:

$$e_A = \frac{2}{|b-c|} \sqrt{bc(p-c)(p-b)}, \quad (7)$$

em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro de ABC .

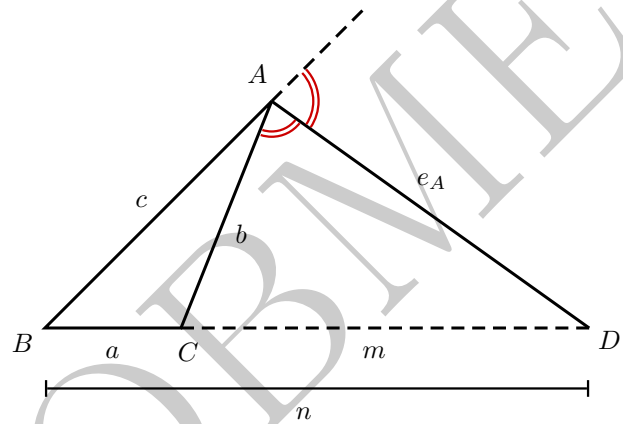


Figura 4: calculando as bissetrizes externas.

Solução. Procedemos como na demonstração do exemplo anterior, supondo $c > b$ e observando que o caso $c < b$ pode ser analisado de forma idêntica. Mais precisamente, pondo $\overline{CD} = m$ e $\overline{BD} = n$, temos pelo Teorema da Bissetriz Externa que:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

Agora, como $n = a + m$, a igualdade acima fornece

$$\begin{aligned} \frac{m}{b} = \frac{a+m}{c} &\implies mc = ab + mb \\ &\implies mc - mb = ab \\ &\implies m(c-b) = ab \\ &\implies m = \frac{ab}{c-b} \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo $m = \frac{ab}{c-b}$ em $n = a + m$, obtemos:

$$n = \frac{ac}{c-b}. \quad (9)$$

Agora, aplicando a Relação de Stewart ao triângulo ABD e utilizando as fórmulas (8) e (9), obtemos:

$$c^2m + e_A^2a = n(b^2 + am)$$

$$c^2m + e_A^2a = nb^2 + nam$$

$$c^2 \cdot \frac{ab}{c-b} + e_A^2a = \frac{ac}{c-b} \cdot b^2 + \frac{ab}{c-b} \cdot a \cdot \frac{ac}{c-b}.$$

Colocando a em evidência em ambos os membros acima, chegamos a

$$\cancel{a} \left(\frac{c^2b}{c-b} + e_A^2 \right) = \cancel{a} \left(\frac{b^2c}{c-b} + \frac{ab}{c-b} \cdot \frac{ac}{c-b} \right),$$

logo,

$$\frac{c^2b}{c-b} + e_A^2 = \frac{b^2c}{c-b} + \frac{a^2bc}{(c-b)^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} e_A^2 &= \frac{b^2c}{c-b} - \frac{c^2b}{c-b} + \frac{a^2bc}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc(b-c)}{c-b} + \frac{a^2bc}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc(b-c)(c-b) + a^2bc}{(c-b)^2} \\ &= \frac{-bc(b-c)^2 + a^2bc}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc[a^2 - (b-c)^2]}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc(a+b-c)(a-b+c)}{(c-b)^2} \\ &= \frac{bc(2p-2c)(2p-2b)}{(c-b)^2} \\ &= \frac{4bc(p-c)(p-b)}{(c-b)^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, extraindo raízes quadradas em ambos os membros, obtemos (7). \square

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Ao explicar a Relação de Stewart, ressalte a Observação 2, pois, quando os alunos estudaram as relações métricas em triângulos retângulos, é provável tenham feito perguntas do tipo: “e se o triângulo não for retângulo?” Ou ainda, “e se fosse outra ceviana, em vez da altura”? Essa é a hora de explicar que a Relação de Stewart responde a essas perguntas mais gerais. Uma fórmula para a medida da altura em função da medida dos lados de um triângulo qualquer também pode ser deduzida a partir da Relação de Stewart, mas é mais fácil deduzi-la a partir da já conhecida fórmula de Herão.

As referências a seguir contêm mais exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, envolvendo as leis dos senos e cossenos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.
2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. São paulo, Editora Atual, 2013.