Material Teórico - Desigualdades Elementares Parte 4

Desigualdades Elementares

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de janeiro de 2020

1 A desigualdade de Cauchy-Schwarz

Neste material, apresentaremos uma demonstração e faremos algumas aplicações interessantes da **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, cujo enunciado é como segue.

Teorema 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Dados números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tem-se*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq$$

$$\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2,$$

valendo a igualdade se, e somente se, existir um número real não nulo λ tal que

$$a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2,\ \ldots,\ a_n = \lambda b_n.$$

Prova. Vamos apresentar a demonstração somente no caso particular $n = 3$. O caso geral segue exatamente a mesma ideia, mas optamos por fazer apenas o caso $n = 3$ para que a ideia central fique mais transparente.

Se $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, nada há a fazer, pois o resultado e a condição para igualdade serão imediatos. Suponhamos, pois, que ao menos um dos números b_1, b_2, b_3 é não nulo. Então, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 > 0$.

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = (a_1 - b_1 x)^2 + (a_2 - b_2 x)^2 + (a_3 - b_3 x)^2.$$

Veja que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1^2 - 2a_1 b_1 x + b_1^2 x^2 + a_2^2 - 2a_2 b_2 x + b_2^2 x^2 \\ &\quad + a_3^2 - 2a_3 b_3 x + b_3^2 x^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)x \\ &\quad + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)x^2. \end{aligned}$$

Assim, f é uma função quadrática, com discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= [2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)]^2 - 4(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\ &= 4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2). \end{aligned}$$

Por outro lado, f é uma soma de quadrados, o que acarreta $f(x) \geq 0$, qualquer que seja x real. Assim, devemos ter $\Delta \leq 0$, o que fornece a desigualdade

$$4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

ou, ainda,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Observe que vale a igualdade

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2), \quad (1)$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= 4[(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que vale a igualdade (1) se, e somente se, f possuir uma raiz real, ou seja, se, e somente se, existir λ real tal que $f(\lambda) = 0$. Mas, como

$$f(\lambda) = (a_1 - \lambda b_1)^2 + (a_2 - \lambda b_2)^2 + (a_3 - \lambda b_3)^2,$$

uma soma de quadrados, temos

$$\begin{aligned} f(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (a_1 - \lambda b_1)^2 = (a_2 - \lambda b_2)^2 = (a_3 - \lambda b_3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 - \lambda b_1 = a_2 - \lambda b_2 = a_3 - \lambda b_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2,\ a_3 = \lambda b_3. \end{aligned}$$

□

Corolário 2. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais dados. Então*

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots a_n^2} &+ \\ + \sqrt{b_1^2 + \ldots b_n^2}&, \end{aligned}$$

valendo a igualdade se, e somente se, existir um número real $\lambda > 0$ tal que

$$a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2,\ \ldots,\ a_n = \lambda b_n.$$

Prova. Novamente, provaremos o resultado apenas para o caso $n = 3$, sendo a prova do caso geral inteiramente análoga.

Dados números reais quaisquer a, b, c, d, e, f, precisamos mostrar que

$$\begin{aligned} \sqrt{(a + d)^2 + (b + e)^2 + (c + f)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} &+ \\ + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}&, \end{aligned}$$

valendo a igualdade se, e somente se, existir um número real $\lambda > 0$ tal que $a = \lambda d$, $b = \lambda e$, $c = \lambda f$.

Observe que

$$\begin{aligned} &(a + d)^2 + (b + e)^2 + (c + f)^2 \\ &= (a^2 + 2ad + d^2) + (b^2 + 2be + e^2) + (c^2 + 2cf + f^2) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) + (d^2 + e^2 + f^2) + 2(ad + be + cf) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}\right)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \\ &\quad + (d^2 + e^2 + f^2). \end{aligned}$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$ad + be + cf \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{d^2 + e^2 + f^2},$$

o que acarreta

$$2(ad + be + cf) \leq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{d^2 + e^2 + f^2},$$

Portanto, adicionando $(a^2 + b^2 + c^2) + (d^2 + e^2 + f^2)$ aos dois membros da última desigualdade acima, obtemos

$$(a + d)^2 + (b + e)^2 + (c + f)^2 \leq \Big(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \\ + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}\Big)^2 .$$

Finalmente, extraindo raízes quadradas nos dois membros, obtemos

$$\sqrt{(a + d)^2 + (b + e)^2 + (c + f)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \\ + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}.$$

Vale a igualdade se, e somente se, tivermos

$$ad + be + cf = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{d^2 + e^2 + f^2}. \qquad (2)$$

Como essa igualdade acarreta

$$(ad + be + cf)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2),$$

deve existir um número real não nulo λ tal que $a = \lambda d$, $b = \lambda e$ e $c = \lambda f$. Substituindo tais expressões para a, b e c no primeiro membro de (2), obtemos

$$\lambda(d^2 + e^2 + f^2) = |\lambda|(d^2 + e^2 + f^2),$$

de sorte que $\lambda \geq 0$. Mas, como $\lambda \neq 0$, devemos ter $\lambda > 0$.

Reciprocamente, se existir $\lambda > 0$ tal que $a = \lambda d$, $b = \lambda e$ e $c = \lambda f$, é imediato verificar (faça isso!) que teremos a igualdade em (2). □

Exemplo 3. *Sejam a, b e c números reais dados. Prove que o sistema de equações*

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2 + z^2) + a^2 + b^2 + c^2 = 6 \\ ax + by + cz = 2 \end{cases} \qquad (3)$$

não tem solução em $\mathbb{R}$.

Solução. Se existissem reais x, y e z satisfazendo (3), então, elevando ao quadrado os dois membros da segunda equação do sistema e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obteríamos

$$4 = (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Assim, fazendo $P = a^2 + b^2 + c^2$ e $Q = x^2 + y^2 + z^2$, teríamos

$$\begin{cases} P + 3Q = 6 \\ PQ \geq 4 \end{cases}.$$

Por outro lado, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\begin{aligned} 6 = P + 3Q &\geq 2\sqrt{P \cdot 3Q} \\ &= 2\sqrt{3 \cdot PQ} \geq 2\sqrt{3 \cdot 4} \\ &= 4\sqrt{3} > 4 \cdot 1,5 = 6, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Logo, (3) não tem soluções. □

Exemplo 4. *Considere um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c. O volume desse paralelepípedo é dado por*

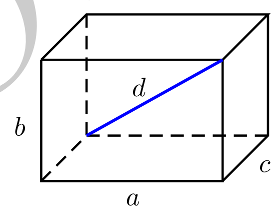
$$V = abc,$$

a sua área total (soma das áreas de todas as faces) é dada por

$$S = 2(ab + bc + ac)$$

e a medida (comum) de suas diagonais é dada por

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz às sequências de números reais (a, b, c) e $(1, 1, 1)$, obtemos

$$(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2,$$

ou seja,

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2. \qquad (4)$$

Uma vez que $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, a última desigualdade acima é equivalente a

$$3d^2 \geq (a + b + c)^2$$

ou, ainda,

$$d \geq \frac{a + b + c}{\sqrt{3}}.$$

Observe que vale a igualdade se, e somente se, existir $\lambda > 0$ tal que $a = \lambda \cdot 1$, $b = \lambda \cdot 1$ e $c = \lambda \cdot 1$, isto é, se, e somente se, $a = b = c$. Desse modo, fixado um número real positivo m, *dentre todos os paralelepípedos reto retângulos cuja soma das dimensões é igual a m, o que tem a menor diagonal é o cubo de aresta $\frac{m}{3}$.*

Agora, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz às sequências de números reais (a, b, c) e (b, c, a), obtemos

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) \geq (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)^2,$$

ou seja,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc. \tag{5}$$

Como $ab + ac + bc = \frac{S}{2}$, temos a desigualdade

$$d^2 \geq \frac{S}{2}.$$

Vale a igualdade se, e somente se, existir $\lambda > 0$ tal que $a = \lambda b$, $b = \lambda c$, $c = \lambda a$. Nesse caso,

$$a = \lambda b = \lambda^2 c = \lambda^3 a,$$

logo, $\lambda = 1$. Assim, vale a igualdade se, e somente se, $a = b = c$. Portanto, *dentre todos os paralelepípedos reto retângulos com uma mesma área total S, o que possui a menor diagonal é o cubo.* Nesse caso, é imediato verificar que a aresta do cubo mede $a = \frac{S}{\sqrt{6}}$.

Finalmente, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz às sequências (a, b, c) e (bc, ac, ab), obtemos

$$(a^2+b^2+c^2)\left((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2\right) \geq (a\cdot bc+b\cdot ac+c\cdot ab)^2,$$

ou seja,

$$d^2(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) \geq (3abc)^2.$$

Daí, segue que

$$d \geq \frac{3V}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}},$$

valendo a igualdade se, e somente se, existir $\lambda > 0$ tal que $a = \lambda bc$, $b = \lambda ac$ e $c = \lambda ab$. Mas, assim sendo, temos

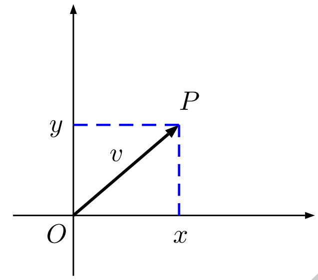
$$a^2 = b^2 = c^2 = \lambda abc,$$

o que acarreta $a = b = c$. Reciprocamente, claramente teremos igualdade se $a = b = c$, e nesse caso o paralelepípedo reto retângulo mais uma vez será um cubo.

Observação 5. *Chamamos sua atenção para o fato de que as desigualdades* (4) *e* (5) *são úteis em muitas outras aplicações (veja, por exemplo, a sugestão de leitura complementar* [1]*). Por isso, sugerimos que você guarde as demonstrações das mesmas.*

2 Vetores e a desigualdade de Cauchy-Schwarz

Os vetores do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ cujas origens coincidem com a origem do sistema cartesiano estão em correspondência biunívoca com os pontos desse plano. De fato, basta fazer a correspondência entre cada vetor e seu ponto final. Assim, associamos a cada vetor v desse tipo as coordenadas do ponto P tal que $v = \overrightarrow{OP}$ (veja a figura a seguir).



Aplicando o Teorema de Pitágoras, é fácil checar que o **comprimento** (ou **norma**) do vetor $v = (x, y)$ desenhado na figura acima, que será denotado por $|v|$, é igual a

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dados $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$, o **produto escalar** de u e v é definido por

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Por outro lado, veja que se $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são vetores em $\mathbb{R}^2$, então

$$|u|^2 = x_1^2 + y_1^2 = \langle u, u\rangle$$

e

$$|v|^2 = x_2^2 + y_2^2 = \langle v, v\rangle.$$

Dados vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$, diremos que u é **múltiplo** de v se existir um número real λ tal que

$$(x_1, y_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2).$$

Nesse caso, escrevemos $u = \lambda v$.

Juntando as informações colecionadas acima, podemos reescrever a desigualdade de Cauchy-Schwarz do seguinte modo:

Teorema 6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz no Plano). *Dados u e v vetores em $\mathbb{R}^2$, temos*

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle$$

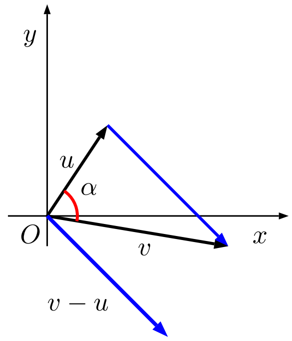
ou, o que é o mesmo,

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u| \cdot |v|.$$

Ademais, vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores u ou v for múltiplo do outro.

A seguir, daremos uma *demonstração geométrica* do teorema anterior. Para tanto, observe a próxima figura. Se os vetores u e v têm coordenadas iguais e (x_1, y_1) e (x_2, y_2), respectivamente, então o vetor $v - u$, destacado em azul, tem coordenadas $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Além disso, veja que

$$\begin{aligned} |v - u|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &= x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) + y_1^2 + y_2^2 \\ &= |u|^2 - 2\langle u, v\rangle + |v|^2. \end{aligned}$$



Por outro lado, denotando por α a medida do ângulo formado pelos vetores u e v e aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo cujos lados medem $|u|$, $|v|$ e $|v-u|$, obtemos:

$$|v-u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha.$$

Comparando as duas expressões para $|v-u|^2$ obtidas acima, concluímos que

$$\langle u, v\rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha.$$

Uma vez que $|\cos\alpha| \leq 1$, valendo a igualdade se, e somente se, $\alpha = 0°$ ou $\alpha = 180°$, obtemos

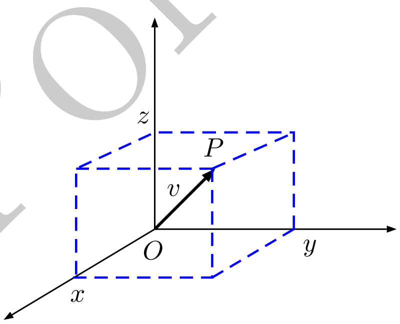
$$|\langle u, v\rangle|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \cos^2\alpha \leq |u|^2 \cdot |v|^2,$$

valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores é múltiplo do outro.

As ideias discutidas nesta seção podem ser facilmente estendidas para vetores no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. Para tanto, definimos o produto escalar $u \cdot v$ entre os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ pondo

$$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Assim fazendo, e seguindo os mesmos passos que levaram ao Teorema 6, obtemos a *versão geométrica tridimensional* da desigualdade de Cauchy-Schwarz, análoga àquela dada pelo Teorema 6.



Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50 minutos para discutir todo o conteúdo reunido neste material.

É importante que o professor mostre a desigualdade de Cauchy-Schwarz com todos os detalhes, ressaltando o argumento utilizado como uma aplicação do estudo das funções quadráticas. Chame a atenção dos alunos para o fato de que o argumento para o caso geral é semelhante ao caso $n = 3$, feito no material.

Intruduza o conceito de vetores no espaço $\mathbb{R}^3$ e explique aos alunos por que as ideias utilizadas no Teorema 6 podem ser estendidas para esse espaço.

As referências colecionadas a seguir trazem muito mais sobre desigualdades.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

3. Paulo Cezar Carvalho e Augusto César Morgado. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro, SBM, 2015.