Material Teórico - Módulo de Métodos sofisticados de contagem

Princípio das Casas dos Pombos

Segundo Ano do Ensino Médio

Prof. Cícero Thiago Bernardino Magalhães
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Em Combinatória, existem basicamente dois tipos de problemas: os de *contagem* de configurações e os de *existência* de configurações. O que vamos estudar agora é uma importante ferramenta na resolução de problemas de existência, conhecida como o *princípio das casas dos pombos* ou *princípio de Dirichlet*[1] ou, ainda, *princípio das gavetas*. Conforme veremos ao longo dos exemplos que serão discutidos, a utilidade de tal ferramenta vem do fato de que ela pode ser aplicada a problemas de existência em Álgebra, Combinatória, Geometria e Teoria dos Números.

Nossa primeira elaboração do princípio da casa dos pombos é dada pelo resultado a seguir.

Teorema 1. *Se $n+1$ pombos são colocados em n casas de pombos, então pelo menos uma casa deverá conter pelo menos 2 pombos.*

Prova. A prova é imediata, pois se em cada casa tivermos no máximo 1 pombo, então teremos distribuído no máximo n pombos nas casas. □

A seguir, discutimos uma série de exemplos que mostram como aplicar o princípio da casa dos pombos nas mais diversas situações.

Exemplo 2. *Quantas pessoas devem comparecer a uma festa para que possamos garantir que pelo menos duas delas nasceram em um mesmo mês do ano?*

Solução. Olhando as pessoas como sendo os pombos e os meses do ano como sendo as casas de pombos, concluímos que, como há 12 meses num ano, devemos ter pelo menos 13 pessoas na festa. Realmente, pelo teorema anterior, ao distribuirmos as 13 pessoas (pombos) dentre os 12 meses (casas dos pombos), de acordo com o mês de nascimento de cada pessoa, teremos, necessariamente, pelo menos um mês no qual nasceram pelo menos duas pessoas. □

Exemplo 3. *A prova da primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) possui 20 questões de múltipla escolha, com 5 itens em cada questão. É possível garantirmos com certeza que pelo menos dois deles marcarão as mesmas respostas para as 20 questões?*

Solução. Como cada questão possui 5 itens, o princípio fundamental da contagem garante que existem

$$5^{20} = 95.367.431.640.625$$

maneiras diferentes de marcar as 20 respostas, o que é mais que 95 trilhões de maneiras diferentes.

Agora, considere os participantes como sendo os pombos e as diferentes maneiras de marcar as 20 respostas como sendo as casas dos pombos. Dessa forma, o princípio da casa dos pombos afirma que, para que tenhamos a certeza de que pelo menos dois participantes marcarão todas as respostas da mesma maneira, devemos ter mais participantes (pombos) do que maneiras diferentes de marcar as 20 respostas (casas dos pombos). Então, concluímos que pelo menos

$$5^{20} + 1 = 95.367.431.640.626$$

estudantes deveriam participar da primeira fase da OBMEP, para que tivéssemos a certeza de obter dois gabaritos iguais para as 20 questões.

Levando em consideração que a população da Terra é de pouco mais de 7 bilhões de habitantes, concluímos que não é possível garantir que duas pessoas irão marcar as 20 respostas da mesma maneira! □

Para o próximo exemplo, precisamos de um fato que é útil em outras circunstâncias.

Lema 4. *Seja dado um natural n. Se dois números inteiros deixam restos iguais na divisão por n, então a diferença deles é um múltiplo de n.*

Prova. Sejam a e b dois números inteiros que deixam resto r na divisão por n, ou seja, $a = q_1n+r$ e $b = q_2n+r$. Então,

$$\begin{aligned} a - b &= (q_1n + r) - (q_2n + r) \\ &= q_1n - q_2n = (q_1 - q_2)n, \end{aligned}$$

que é um múltiplo de n. □

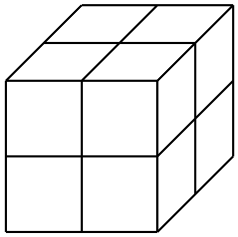
Exemplo 5. *Dados arbitrariamente doze números inteiros, mostre que é sempre possível escolhermos dois deles, de modo que sua diferença seja divisível por 11.*

Prova. Considere os números sendo os pombos e os restos na divisão por 11, que são $0, 1, \ldots, 10$, como sendo as casas dos pombos. Como existem mais números (pombos) do que restos (casas de pombos), concluímos que sempre existirão pelo menos dois números que deixarão restos iguais na divisão por 11. Portanto, pelo lema anterior, a diferença entre esses dois números é um múltiplo de 11. □

Exemplo 6. *Escolhem-se, ao acaso, nove pontos em um cubo de aresta 2. Prove que sempre existem pelo menos dois pontos que se encontram a uma distância um do outro de, no máximo, $\sqrt{3}$.*

Prova. Divida o cubo em oito cubos menores seccionando cada aresta ao meio (veja a figura a seguir). Cada um dos oito cubos (casas de pombos) assim gerados, tendo aresta 1, terá sua diagonal medindo $\sqrt{3}$. Como temos 9 pontos (pombos), concluímos (novamente com o auxílio do Teorema 1) que pelo menos um dos oito cubos conterá dois ou mais pontos.

[1] Em homenagem ao matemático alemão do século XIX Gustave L. Dirichlet, que foi quem primeiro formulou e utilizou o princípio das casas dos pombos.



Por fim, como a maior distância possível entre dois pontos de um mesmo cubo é o comprimento de suas diagonais, concluímos que dois pontos situados em um cubo de aresta 1 distarão, um do outro, de no máximo $\sqrt{3}$. $\square$

Exemplo 7. *Em cada casa de um tabuleiro 3×3, um dos números 1, -1 ou 0 foi escrito. Prove que, após calcularmos as somas dos números de cada linha, coluna e diagonal do tabuleiro, encontraremos pelo menos duas somas iguais.*

Prova. Como cada linha, coluna ou diagonal tem exatamente três casas, as 7 somas possíveis para os números dessas três casas são -3, -2, -1, 0, 1, 2 ou 3; considere-as como sendo nossas casas de pombos. Também, considere as 3 linhas, as 3 colunas e as 2 diagonais como sendo nossos pombos. Uma vez mais, temos mais pombos do que casas de pombos, de forma que, pelo princípio das casas de pombos, existirão duas linhas, colunas ou diagonais tais que as somas de números em suas casas são iguais. $\square$

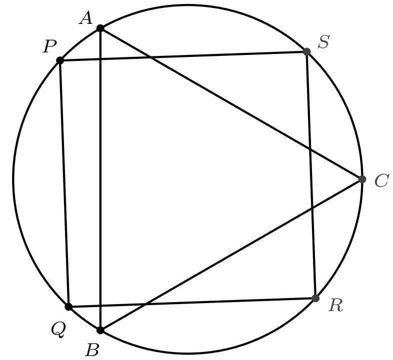
Exemplo 8. *Um triângulo equilátero e um quadrado são inscritos em uma círculo de comprimento 1, de tal forma que nenhum vértice do triângulo coincida com algum vértice do quadrado. Os vértices dividem o círculo em 7 arcos. Mostre que algum destes arcos tem comprimento menor ou igual a $\frac{1}{24}$.*

Prova. Sejam ABC o triângulo equilátero e $PQRS$ o quadrado (veja a figura a seguir). Considere os arcos determinados pelo triângulo equilátero como sendo as casas de pombos e os vértices do quadrado como sendo os pombos. Pelo princípio das casas de pombos, verificamos que existem dois vértices do quadrado em um dos três arcos determinados pelos vértices do triângulo equilátero. Suponha, sem perda de generalidade, que, no arco AB, se encontram os vértices P e Q.

Seja $m(XY)$ a medida do arco $\overset{\frown}{XY}$. Como ABC é equilátero, temos $m(AB) = m(BC) = m(AC) = \frac{1}{3}$; analogamente, segue de $PQRS$ ser um quadrado que $m(PQ) = \frac{1}{4}$. Portanto, temos que

$$m(AP) + m(QB) = m(AB) - m(PQ) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Logo, um dos arcos AP ou QB possui comprimento menor ou igual a $\frac{1}{24}$.



$\square$

Exemplo 9. *Beatriz possui 100 colegas em sua escola. Sabe-se que os alunos dessa escola podem usar blusas com uma dentre 10 possíveis cores e bermudas com uma dentre 10 possíveis cores. Mostre que, em um dia qualquer, sempre existirão pelo menos dois alunos que se vestirão exatamente da mesma forma, ou seja, com blusas de mesma cor e bermudas de mesma cor.*

Prova. Como há 10 possíveis cores para blusas e bermudas, o princípio fundamental da contagem garante que há exatamente $10 \cdot 10 = 100$ combinações possíveis de cores para blusas e bermudas. Considere essas 100 combinações de cores como as casas de pombos, e os 101 alunos da escola (Beatriz e seus 100 colegas) como os pombos. Como existem mais alunos (pombos) do que combinações de cores (casas de pombos), o princípio das casas de pombos garante que existem pelo menos dois alunos que se vestirão da mesma forma. $\square$

Exemplo 10. *Mostrar que todo inteiro positivo n possui um múltiplo que se escreve, na base 10, somente com os algarismos 0 e 1.*

Prova. Consideremos a sequência formada pelos $n+1$ números

$$1, 11, 111, \ldots, 11111\ldots 11,$$

onde o último número contém $n+1$ algarismos. Em seguida, observe que, na divisão de um número natural por n, há exatamente n possíveis valores para o resto: 0, 1, 2, $\ldots$, $n-1$. Portanto, se tomarmos os $n+1$ números da sequência acima como sendo nossos pombos e os n possíveis restos em uma divisão por n como sendo nossas casas de pombos, teremos, uma vez mais, mais pombos do que casas de pombos. Portanto, pelo princípio das casas de pombos, pelo menos dois dos $n+1$ números da sequência deixarão um mesmo resto na divisão por n. Logo, segue do lema 4 que a diferença entre esses dois números será divisível por n. Por fim, é fácil ver que tal diferença contém somente os algarismos 0 e 1. $\square$

A seguir, discutimos uma versão mais elaborada do princípio da casa dos pombos, a qual dá mais flexibilidade às aplicações do mesmo.

Teorema 11. *Sejam n e k números naturais dados. Se $nk+1$ pombos são colocados em n casas de pombos, então pelo menos uma das casas deverá conter pelo menos $k+1$ pombos.*

Prova. Por contradição, suponhamos que cada uma das n casas contivesse no máximo k pombos. Então, teríamos máximo nk pombos, o que não é o caso. □

Exemplo 12. *Uma caixa contém 90 bolas, sendo 20 vermelhas, 30 verdes e 40 azuis. Determine o menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver escolhido pelo menos 10 bolas de uma mesma cor.*

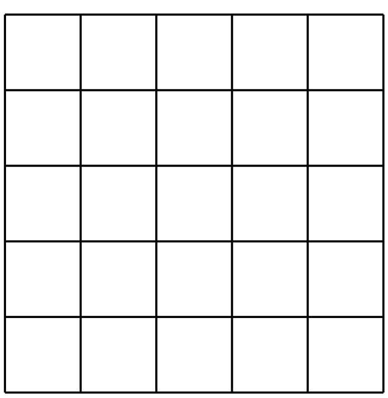
Solução. A menor quantidade é 28. Para ver isso, considere as bolas como sendo os pombos e as cores vermelha, verde e azul como sendo as casas de pombos. Então, nas notações do enunciado do teorema anterior, temos $n = 3$ e queremos que $k + 1 \geq 10$. Logo, $k \geq 9$ e o teorema diz que, se tirarmos

$$nk + 1 \geq 3 \cdot 9 + 1 = 28$$

bolas, teremos escolhido, com certeza, pelo menos $k + 1 \geq 10$ bolas de uma mesma cor. □

Exemplo 13. *Em um quadrado de lado 1, foram distribuidos 51 pontos. Prove que sempre podemos escolher pelo menos 3 desses pontos, tais que podem ser cobertos por um disco de raio $\frac{1}{7}$.*

Prova. Divida o quadrado em 25 quadradinhos de lado $\frac{1}{5}$, conforme mostrado no diagrama a seguir.



Considere os 51 pontos como sendo os pombos e os 25 quadradinhos como sendo as casas de pombos. Como $51 = 25 \cdot 2 + 1$, a segunda versão do princípio das casas de pombos (Teorema 11) garante que, em pelo menos um quadradinho (casa de pombos) haverá pelo menos 3 pontos (pombos). Dessa forma, o disco delimitado pelo círculo circunscrito a esse quadradinho também conterá esses 3 pontos. Por fim, um cálculo geométrico imediato garante que tal disco tem raio igual a $\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{7}$. Logo, aumentando o raio desse disco até que ele seja igual a $\frac{1}{7}$, concluímos que existe um disco de raio $\frac{1}{7}$ que contém pelo menos 3 dos 51 pontos dados.

□

Exemplo 14. *Mostre que, dados 17 números naturais, é sempre possível escolhermos 5 deles cuja soma seja divisível por 5.*

Prova. Primeiramente, observe que os possíveis restos numa divisão por 5 são 0, 1, 2, 3 ou 4, num total de 5 restos possíveis. Consideremos, agora, dois casos separadamente:

- Se, dentre os 17 números, existirem 5 números com restos diferentes na divisão por 5, então tais números serão da forma $5a$, $5b + 1$, $5c + 2$, $5d + 3$ e $5e + 4$, para certos naturais a, b, c, d, e. Logo, a soma desses 5 números será igual a $5(a + b + c + d + e + 2)$, logo, divisível por 5.

- Suponha, agora, que um dos possíveis restos na divisão por 5 não esteja presente, e que os restos presentes sejam as casas de pombos. Também, sejam os pombos os 17 números dados. Como $17 = 4 \cdot 4 + 1$, a segunda versão do princípio das casas de pombos garante que, dentre os 17 números dados, existem pelo menos 5 que deixam um mesmo resto na divisão por 5. Sejam r esse resto comum e $5a + r$, $5b + r$, $5c + r$, $5d + r$ e $5e + r$ os cinco números com restos iguais, para certos naturais a, b, c, d, e. Então, a soma desses 5 números é $5(a + b + c + d + e + 1)$, logo, novamente divisível por 5.

□

A proposição a seguir encerra uma variação da ideia da demonstração da segunda versão do princípio das casas dos pombos que é, por vezes, bastante útil. Para o enunciado da mesma, recorde que a média aritmética dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é, por definição, o número real

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Proposição 15. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais dados, com média aritmética igual a A. Então, existem índices $1 \leq i, j \leq n$ tais que $a_i \leq A$ e $a_j \geq A$.*

Prova. Se fosse $a_1, a_2, \ldots, a_n > A$, teríamos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > \underbrace{A + A + \cdots + A}_{n} = nA.$$

Logo, teríamos também que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} > A,$$

contradizendo o fato de que A, sendo a média aritmética de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, deve ser igual ao (e não menor que) primeiro membro. $\square$

Exemplo 16. *A soma de nove números inteiros é* 27*. Mostre que é sempre possível encontrarmos dois desses nove números cuja soma seja maior ou igual a* 6*.*

Prova. Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_9$ os nove números dados, sabemos que podemos formar exatamente $\binom{9}{2} = 36$ pares de números com eles. Como cada um dos nove números dados aparece em exatamente oito pares, concluímos que a soma das 36 somas dos números de cada par é igual a

$$8(a_1 + a_2 + \cdots + a_9) = 8 \cdot 27 = 216.$$

Logo, a média aritmética das 36 somas é igual a $\frac{216}{36} = 6$. Portanto, pela proposição anterior, existe um par cuja soma é maior ou igual a 6. $\square$

Exemplo 17. *Os números* $1, 2, \ldots, 15$ *são escritos, de maneira aleatória, ao redor de um círculo. Mostre que a soma de pelo menos um conjunto de* 5 *números escritos consecutivamente é maior ou igual a* 40*.*

Prova. Se listarmos os elementos de todos os 15 possíveis conjuntos de 5 números escritos consecutivamente ao redor do círculo, então cada um dos números de 1 a 15 aparecerá exatamente 5 vezes. Portanto, a soma dos elementos de todos os 15 possíveis conjuntos de 5 números escritos consecutivamente ao redor do círculo é igual a

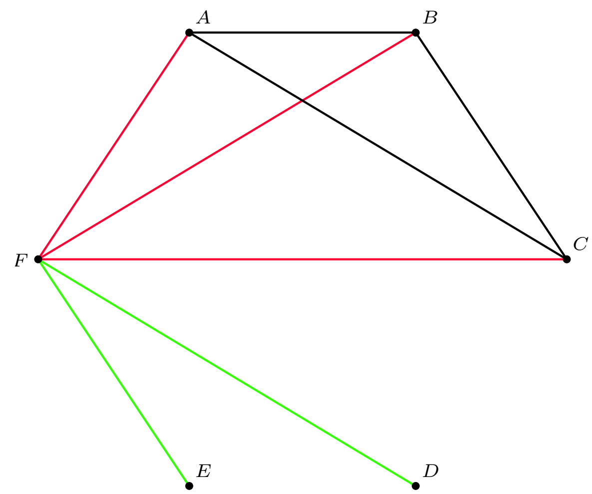
$$5(1 + 2 + \cdots + 15) = 600,$$

de forma que a média aritmética dessas 15 somas é igual a $\frac{600}{15} = 40$. Então, pela proposição anterior, pelo menos uma dessas 15 somas é maior ou igual a 40. $\square$

Os próximos dois exemplos mostram que, por vezes, a fim de podermos aplicar convenientemente o princípio das casas dos pombos, é útil interpretar a situação proposta *geometricamente*.

Exemplo 18. *Em uma reunião, há* 6 *pessoas. Mostre que há necessariamente* 3 *pessoas que se conhecem mutuamente ou* 3 *pessoas que não se conhecem mutuamente. Assuma que, se a pessoa* A *conhece a pessoa* B*, então a pessoa* B *também conhece a pessoa* A*.*

Prova. Representemos as seis pessoas pelos pontos A, B, C, D, E e F do plano, unindo cada duas pessoas que se conhecem por um segmento de cor verde e cada duas que não se conhecem por um segmento de cor vermelha. Dessa forma três pessoas se conhecem duas a duas se formarem os vértices de um triângulo de cor verde, e não se conhecem duas a duas se formarem os vértices de um triângulo de cor vermelha.



Considere os segmentos que partem de F como sendo os pombos e as duas cores como sendo as casas de pombos. Pela segunda versão do princípio das casas de pombos, existem pelo menos 3 segmentos de mesma cor. Sem perda de generalidade, suponha que a configuração resultante seja a da figura acima, e analisemos as possíveis colorações dos lados do triângulo ABC. Há duas possibilidades a considerar:

- Se um dos lados AB, AC ou BC for colorido de vermelho, teremos um monocromático vermelho. Por exemplo, se AB for vermelho, então o triângulo ABF será monocromático vermelho.
- Se nenhum dos lados AB, AC ou BC for colorido de vermelho, então todos serão coloridos de verde. Nesse caso, o triângulo ABC será um triângulo monocromático verde.

$\square$

Exemplo 19. *Mostre que, dentre seis números irracionais, sempre existem três tais que a soma de quaisquer dois deles também é irracional.*

Prova. Utilizando as mesmas ideia e figura do exemplo anterior, sejam A, B, C, D, E e F os números irracionais. Um segmento é colorido de verde se os extremos do segmento X e Y são tais que $X + Y$ é racional e é colorido de vermelho se $X + Y$ é irracional. Sabemos que existe um triângulo monocromático, e um triângulo vermelho resolve o nosso problema. Vejamos que o triângulo monocromático que sabemos existir não pode ser verde. Caso seja o triângulo com vértices A, B e C, por exemplo, então $A + B$, $A + C$ e $B + C$ são racionais. Porém, nesse caso, também será racional o número

$$(A + B) + (C + A) - (B + C) = 2A,$$

de forma que A será racional, o que é uma contradição. $\square$

Dicas para o Professor

É importante que o professor faça uma introdução prévia a problemas de existência, em comparação com problemas de contagem. Nesse sentido, uma estratégia útil é apresentar os enunciados de alguns dos exemplos do material (antes de discutir o princípio das casas dos pombos), a fim de convencer os alunos de que as técnicas de contagem que eles conhecem não são aplicáveis à resolução dos mesmos. Além disso, mostrar que a ferramenta se aplica em problemas que não são necessariamente de contagem.

Ao todo, sugerimos utilizar dois ou três encontros, de 50 minutos cada, para desenvolver todo o conteúdo desse material. Dado o fato de que os argumentos apresentados aqui são uma total novidade para os estudantes, sugerimos fortemente que, após resolver dois ou três exemplos-modelo, o professor dê um tempo razoável para os estudantes pensarem em outros dos exemplos a serem discutidos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho. *O princípio das gavetas*. Revista Eureka, número 5. Disponível em www.obm.org.br

2. A. C. Morgado, J. B. P. de Carvalho, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro, IMPA, 2000.

3. J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. Murari. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.