Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas

Noções Básicas - Parte 1

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

07 de Dezembro de 2024

1 Definição de função

Chamamos de **grandeza** a tudo aquilo que pode ser contado ou medido, por comparação com um padrão, de modo a estar associado a um número. Alguns exemplos de grandezas são: comprimento, área, volume, massa, energia, temperatura, tempo e velocidade.

No estudo de fenômenos da Natureza é comum que algumas grandezas dependam de outras. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. *A altura de uma criança depende de sua idade. Quanto maior a idade, maior a altura, sendo que essa altura tende a se estabilizar, ou seja, a ficar constante a partir de uma certa idade.*

Exemplo 2. *A pressão atmosférica varia com a altitude, sendo que, quanto maior é a altitude, menor é a pressão atmosférica. A seguir, exibimos uma tabela com a relação entre algumas altitudes e suas respectivas pressões atmosféricas.*

Altitude (em metros)	*Pressão (mmHg)*
0	760
1000	674
2000	596
3000	526
4000	462
9000	231

Em geral, a pressão atmosférica é medida em atmosferas *(abreviamos* atm*), de forma que* $1atm$ *corresponde à pressão exercida por uma coluna de mercúrio (Hg) de* $760mm$ *de altura. Por outro lado, a unidade de medida padrão para pressão, no sistema internacional de unidades (SI) é o* Pascal *(Pa). A relação entre essas duas unidades é* $1\,atm = 1,01325 \cdot 10^5 Pa$.

Exemplo 3. *Duas grandezas são ditas* ***diretamente proporcionais*** *se a variação de uma delas provoca a variação da outra na mesma razão, ou seja, se uma delas duplica, a* *outra também duplica; se uma delas triplica, a outra também triplica; se uma delas é dividida por dois, a outra também é dividida por dois, etc. Por exemplo, de acordo com a segunda lei de Newton da Mecânica, uma força $\overrightarrow{F}$ aplicada a um objeto provoca uma aceleração $\overrightarrow{a}$ diretamente proporcional a essa força. A relação entre essas duas grandezas é dada pela expressão $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$, ou $\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F}}{m}$, onde a constante m é a massa do objeto.*

Em cada um dos exemplos acima, há uma relação de dependência entre duas grandezas, ou seja, a variação de uma das grandezas depende da variação de outra. Assim, em cada exemplo acima temos uma grandeza que varia de modo *independente* (idade, altitude, força) e que, por isso, chamaremos *variável independente*, e uma grandeza que varia de modo *dependente* (altura da criança, pressão atmosférica, aceleração) que chamaremos *variável dependente*. Essa relação tem duas propriedades básicas:

i. Para cada valor da variável *independente*, há um valor correspondente da variável *dependente*.

ii. A cada valor da variável *independente* corresponde um *único* valor da variável *dependente*.

A linguagem matemática mais adequada para descrever a situação acima é a dos conjuntos: se A é o conjunto de todas as variáveis independentes e B é o conjunto de todas as variáveis dependentes, então uma relação de dependência, ou *correspondência*, f, entre os dois conjuntos de grandezas é representada pela notação

$$f : A \to B. \tag{1}$$

Essa notação é uma abreviação para o fato de que, a cada elemento a do conjunto A, corresponde um único elemento b do conjunto B. Indicamos essa correspondência entre elementos específicos escrevendo

$$f(a) = b. \tag{2}$$

Assim, no Exemplo 1, a altura de uma criança com idade i é $f(i)$; no Exemplo 2, a informação da tabela pode ser reescrita como $f(0) = 760$, $f(1000) = 674$, $f(2000) = 596$, etc.; por fim, no Exemplo 3, uma força de $10N$ (lê-se 10 "newtons" – o *Newton* é a unidade SI de medida de força) aplicada a um corpo de massa $m = 5\,kg$ provoca sobre ele uma aceleração de intensidade $f(10) = \frac{10}{5} = 2m/s^2$.

A discussão acima nos leva à seguinte

Definição 4. *Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma* ***função f de A em B*** *é uma correspondência entre elementos de A e elementos de B, denotada por $f : A \to B$, que associa a cada elemento $a \in A$ um único elemento $b \in B$.*

Observações 1. *Nas notações da definição acima:*

i. *O conjunto A é chamado de* ***domínio*** *da função f. O conjunto B é chamado* ***contradomínio*** *de f.*

ii. *Se $a \in A$, o elemento $b = f(a) \in B$ é chamado* ***imagem de a*** *pela função f.*

iii. *Dizer que f associa "a cada elemento $a \in A$ um único elemento $b \in B$" significa que nenhum elemento de A pode ficar sem imagem, e que um elemento $a \in A$ só pode ter uma única imagem.*

A definição de função nos permite considerar correspondências mais gerais, onde os elementos do domínio e do contradomínio não são necessariamente números. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 5 (o carteiro). *Seja A um conjunto de cartas e seja B um conjunto de casas. Podemos pensar no conjunto A como a bolsa de um carteiro e B como o conjunto de casas dentre as quais estão aquelas que serão visitadas pelo carteiro. Vamos considerar a correspondência (desculpem o trocadilho!) $f : A \to B$ que associa a uma carta $a \in A$ a casa $f(a) \in B$ para qual esta carta foi endereçada. Cada carta está associada a uma casa e uma carta não pode ir para duas casas ao mesmo tempo. Logo, f é uma função.*

Exemplo 6 (alunos e cadeiras). *Considere o conjunto A dos alunos em uma sala de aula e o conjunto B das cadeiras desta mesma sala. Seja $f : A \to B$ a correspondência que associa a cada aluno a cadeira onde ele está sentado. Se algum aluno estiver de pé, a correspondência não será uma função, pois um elemento do domínio (o aluno que estará de pé) não corresponderá a elemento algum do contradomínio (o conjunto das cadeiras). Se um aluno ocupar duas cadeiras, f também não será uma função, porque um elemento do domínio corresponderá a dois elementos do contradomínio (as duas cadeiras ocupadas pelo mesmo aluno). Agora, se cada aluno estiver sentado em uma só cadeira, a correspondência f será uma função, pois cada elemento do domínio estará associado a um único elemento do contradomínio.*

Quando os conjuntos A e B são *finitos*, podemos visualizar uma função $f : A \to B$ de uma maneira mais *concreta* por meio de *diagramas de setas* como o da figura 1, onde cada seta indica que elemento $y \in B$ está associado a cada $x \in A$. No exemplo da figura 1, temos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$

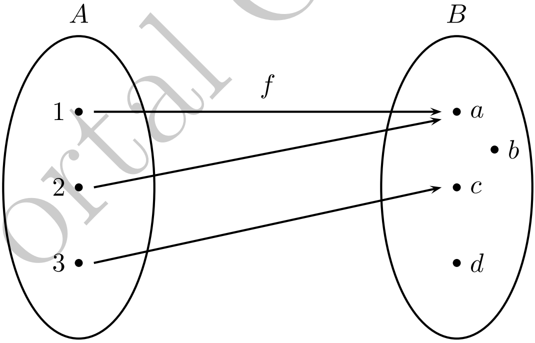

Figura 1: exemplo de função f de A em B.

e $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = c$. Assim, a é a imagem de 1 e de 2 por f, e c é a imagem de 3 por f.

Ainda raciocinando em termos de diagramas de setas, a definição de função permite que, no diagrama correspondente, um ou mais elementos de B não recebam setas. Ela permite também que um ou mais elementos de B recebam mais de uma seta. Veja que ambas essas possibilidades estão presentes na figura 1.

Contudo, os diagramas das figuras 2 e 3 **não representam** funções. A situação da figura 2 é proibida porque não há nenhuma seta partindo do elemento $1 \in A$. A situação da figura 3 é proibida porque do elemento $1 \in A$ parte mais de uma seta.

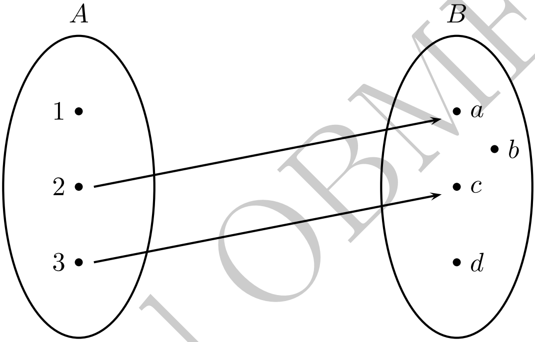

Figura 2: A tem elementos dos quais não parte seta alguma.

Para uma função $f : A \to B$, o conjunto de todos os elementos do contradomínio B que correspondem a algum elemento do domínio A é um subconjunto de B chamado de **imagem** da função f, e é denotado por $\operatorname{Im} f$. Em símbolos,

$$\operatorname{Im} f = \{b \in B \mid b = f(a), \text{ para algum } a \in A\}.$$

No Exemplo 5, a imagem da função f é o conjunto de casas que receberam pelo menos uma carta. Note que pode haver casas que não receberam cartas, logo, a imagem não precisa ser igual ao contradomínio.

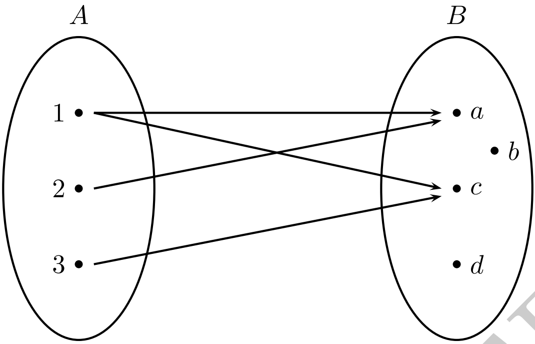

Figura 3: A tem elementos dos quais parte mais de uma seta.

No Exemplo 6, a imagem da função é o conjunto das cadeiras onde há algum aluno sentado. Pode haver cadeiras vazias, que são os elementos que pertencem ao contradomínio mas não pertencem à imagem da função.

Em termos de diagramas de setas, a imagem de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $\operatorname{Im} f$ de B, composto pelos elementos de B que *recebem setas*:

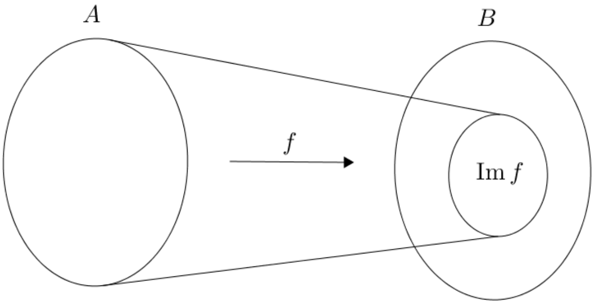

Figura 4: a imagem de uma função.

Assim, no exemplo da figura 1, temos $\operatorname{Im} f = \{a, c\}$.

2 Mais exemplos de funções

Nesta seção, reunimos mais exemplos de funções, a fim de que você se familiarize mais com elas e, por outro lado, passe a dispor de um *estoque* maior de funções.

Exemplo 7 (função constante). *Dados conjuntos não vazios A e B e fixado um elemento $c \in B$, a **função constante** c de A em B é a função $f : A \to B$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in A$.*

Em termos de diagramas de setas, se $f : A \to B$ for a função constante e igual a c, então c é o único elemento de B que recebe setas de elementos $x \in A$. Portanto, c recebe setas de todos *os elementos de A.*

Exemplo 8 (função identidade). *Dado um conjunto não vazio A, a **função identidade** de A, denotada por $\mathrm{Id}_A : A \to A$, é a função dada por $\mathrm{Id}_A(x) = x$, para todo $x \in A$.*

Desenhe um diagrama para representar a função identidade do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Faça o mesmo para representar a função identidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais (sim, eu sei, esse conjunto é infinito; mesmo assim, tente!).

Algo simples, mas importante, em relação ao exemplo anterior é que ele chama a atenção para o fato de que, ao considerarmos uma função $f : A \to B$, em nenhum lugar é dito que devamos ter $A \neq B$; pode ser $A = B$ e, nessa situação, dizemos que $f : A \to A$ é uma *função em A*.

Seja $f : A \to B$ uma função. Se $A \subset \mathbb{R}$, dizemos que f **tem variável real**. Se $B \subset \mathbb{R}$, dizemos que f é uma **função real**. Dessa forma, dizemos que uma função $f : A \to B$ é *real de variável real*, se o seu domínio A e seu contradomínio B forem ambos formados por números reais.

Quando $f : A \to B$ for uma função real de variável real, muitas vezes indicamos a imagem $f(x) \in B$ de $x \in A$ por meio de uma *fórmula em x*. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9 (função afim). *Uma* ***função afim****, ou* ***de primeiro grau****, é uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = ax+b$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*; aqui,* a *e* b *são números reais dados, com* $a \neq 0$*.*

Assim, para cada escolha de reais a e b, com $a \neq 0$, temos uma função afim. Por exemplo $f(x) = -2x + 1$ define uma função afim; $f(x) = \sqrt{3}x + \pi$ define outra, etc. Posteriormente, gastaremos algum tempo estudando propriedades específicas de funções afins.

Exemplo 10 (função quadrática). *Uma* ***função quadrática****, ou* ***de segundo grau****, é uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Aqui,* a*,* b *e* c *são números reais dados, com* $a \neq 0$*.*

Como no caso de funções afins, para cada escolha de reais a, b e c, com $a \neq 0$, temos uma função de segundo grau. Por exemplo $f(x) = -2x^2 + 1$ define uma função de segundo grau (na qual $a = -2$, $b = 0$, $c = 1$); $f(x) = \sqrt{3}x^2 + \pi x - 1$ define outra, etc. Também como no caso de funções afins, mais adiante estudaremos propriedades específicas de funções quadráticas.

Exemplo 11. *Considere a função* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}, & se\ x \leq 0 \\ x+1, & se\ x > 0 \end{cases} .$$

Certamente que temos uma função, pois as expressões que definem $f(x)$ *têm sentido em* $\mathbb{R}$ *e, apesar de devermos aplicar fórmulas diferentes, conforme o número racional* x *satisfaça* $x \leq 0$ *ou* $x > 0$*, cada racional* x *tem uma única imagem* $f(x)$ *bem definida, uma vez que os casos* $x \leq 0$ *e* $x > 0$ *cobrem todos os racionais. Assim, por exemplo,* $f(-1) = \sqrt{(-1)^2+1} = \sqrt{2}$ *(uma vez que* $-1 \leq 0$*), mas* $f(2) = 2+1 = 3$ *(uma vez que* $2 > 0$*).*

Observe que poderíamos ter definido $f(x)$ escrevendo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}, & se\ x \leq 0 \\ x+1, & se\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Nesse caso, as condições $x \leq 0$ e $x \geq 0$ cobrem todos os racionais mas não são mais disjuntas: $x = 0$ satisfaz ambas; no entanto, as fórmulas que devemos aplicar a um caso ou outro dão um mesmo resultado quando $x = 0$ (uma vez que $\sqrt{0^2+1} = 0+1$).

*Como usamos fórmulas diferentes para calcular $f(x)$, dependendo de uma condição sobre x (no caso, $x \in (-\infty, 0]$ ou $x \in [0, +\infty)$), dizemos que a função f desse exemplo está **definida por partes**.*

Para o próximo exemplo, fixado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o conjunto dos n primeiros números naturais, ou seja, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ etc.

Exemplo 12 (sequências). *Uma **sequência infinita** de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Uma **sequência finita de n números reais** é uma função $f : I_n \to \mathbb{R}$.*

Dada uma sequência infinita $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é costume denotar $f(k)$ por a_k. Ao fazermos isso, obtemos a notação usual para a sequência:

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), a_3 = f(3), \ldots.$$

Assim, em geral denotamos uma sequência infinita simplesmente por $(a_k)_{k \geq 1}$.

Usando a mesma notação para uma sequência finita $f : I_n \to \mathbb{R}$, obtemos a notação usual

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

ou, mais simplesmente, $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Exemplo 13. *A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \frac{2^n}{n^2+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência infinita. Conforme comentamos no exemplo anterior, f pode ser alternativamente representada como $(a_n)_{n \geq 1}$, em que $a_n = \frac{2^n}{n^2+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 14 (função parte inteira). *A **parte inteira** de um real x, denotada $\lfloor x \rfloor$, é definida como o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo:*

- $\lfloor 1 \rfloor = 0$, *pois* 0 *é o maior inteiro menor ou igual a* 1*;*
- $\lfloor \pi \rfloor = 3$ (*pois* $3 < \pi < 4$ *implica que* 3 *é o maior inteiro menor ou igual a* π);
- $\lfloor -2\sqrt{3} \rfloor = -4$ (*pois* $-4 < -2\sqrt{3} < -3$ *implica que* -4 *é o maior inteiro menor ou igual a* $-2\sqrt{3}$).

*A **função parte inteira**, $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, associa a cada $x \in \mathbb{R}$ sua parte inteira $\lfloor x \rfloor$. Encontre, com justificativa, a imagem da função parte inteira.*

Solução. Por definição, temos que $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $\mathrm{Im}(\lfloor \cdot \rfloor) \subset \mathbb{Z}$. Mas, como $\lfloor n \rfloor = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que todo inteiro pertence à imagem da função parte inteira. Assim, $\mathrm{Im}(\lfloor \cdot \rfloor) = \mathbb{Z}$. $\square$

Exemplo 15 (função parte fracionária). *A **parte fracionária** de um real x, denotada $\{x\}$, é definida por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x. Por exemplo:*

- $\{1\} = 1 - \lfloor 1 \rfloor = 1 - 1 = 0$*;*
- $\{\pi\} = \pi - \lfloor \pi \rfloor = \pi - 3$*;*
- $\{-2\sqrt{3}\} = -2\sqrt{3} - \lfloor -2\sqrt{3} \rfloor = -2\sqrt{3} - (-4) = 4 - 2\sqrt{3}$.

*A **função parte fracionária**, $\{\cdot\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, associa a cada $x \in \mathbb{R}$ sua parte fracionária $\{x\}$. Encontre, com justificativa, sua imagem.*

Solução. Como $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x e os inteiros aparecem *de um em um*, temos que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Portanto, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, isto é, $0 \leq \{x\} < 1$. Desse modo, $\mathrm{Im}(\{\cdot\}) \subset [0, 1)$.

Por outro lado, tomando $x \in [0, 1)$, temos $\lfloor x \rfloor = 0$, logo, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = x$. Então, $[0, 1) \subset \mathrm{Im}(\{\cdot\})$ e, daí, temos $\mathrm{Im}(\{\cdot\}) = [0, 1)$. $\square$

Dicas para o Professor

Dois ou três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir este material. Você pode trabalhar com exemplos antes de dar a definição formal de função, uma vez que eles tornam mais claras as exigências que temos que fazer sobre uma correspondência para que ela seja uma função.

A própria ideia intuitiva de função pode ser introduzida de várias maneiras, dependendo dos exemplos que a motivem. Olhando o Exemplo 6, temos uma ideia de função como uma correspondência *estática* entre dois conjuntos (mesmo que os alunos não se movam, a função está lá). O exemplo 5 já nos dá uma ideia *dinâmica* de função, pois há uma ação envolvida (para haver função, o carteiro tem que fazer a entrega das cartas).O Exemplo 6 é particularmente interessante, por ser fácil de trabalhar em sala de aula e envolver diretamente os alunos.

Os exemplos de funções reais de variável real que reunimos na seção 2 são mais *abstratos*, mas a compreensão dos mesmos é fundamental para a continuidade do estudo de funções, que faremos nos próximos materiais. Assim, sugerimos que você gaste bastante tempo com esses exemplos, possivelmente apresentando variações dos mesmos (como no caso de funções definidas por partes), a fim de que os estudantes familiarizem-se com eles.

As referências a seguir trazem cursos completos sobre os aspectos mais simples de funções.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, Volume 3, terceira edição. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2022.