Material Teórico - Módulo Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Dispositivo de Briot-Ruffini

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal OBMEP

15 de maio de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Dispositivo de Briot-Ruffini

O *dispositivo de Briot-Ruffini*, também chamado de *esquema de Horner*, é um método prático para executar divisões de um polinômio $p(x)$ por uma função afim do tipo $x - a$, onde a é uma constante e o coeficiente de x é 1.

A título de ilustração, consideremos a divisão de $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $x - 3$. Pelo Teorema do Resto (estudado na aula anterior), já sabemos que o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é a constante $p(a)$. Sendo assim, no exemplo que vamos discutir, tal resto vale $p(3)$, que pode ser calculado diretamente como:

$$\begin{aligned} p(3) &= 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2 \\ &= 27 - 36 + 15 - 2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Veremos que, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, conseguiremos calcular $p(3)$ fazendo um "esforço computacional" menor do que substituindo "3" diretamente (como acima) na expressão dos coeficientes de $p(x)$. Ademais, o dispositivo ainda nos fornecerá o quociente da divisão por $x - 3$.

No fundo, este dispositivo é apenas uma maneira compacta de organizar os dados do dispositivo usual da divisão Euclidiana. Por isso, começemos revendo a divisão Euclidiana de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $x - 3$ (o passo a passo da divisão abaixo pode ser visto na vídeo-aula deste material; colocamos aqui apenas o resultado final).

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -\,4x^2 & +\,5x & -\,2 & x - 3 \\ \cline{5-5} -\,x^3 & +\,3x^2 & & & x^2 - x + 2 \\ \cline{1-2} & -\,x^2 & +\,5x & & \\ & x^2 & -\,3x & & \\ \cline{2-3} & & 2x & -\,2 & \\ & & -\,2x & +\,6 & \\ \cline{3-4} & & & 4 & \end{array}$$

Portal OBMEP

Obtemos o resto 4, como era esperado, e o quociente $q(x) = x^2 - x + 2$.

Com Briot-Ruffini, os dados acima são organizados da seguinte forma. Na primeira linha, colocamos o número 3, pois estamos dividindo por $x - 3$, e colocamos os coeficientes de $p(x)$, *partindo do monômio de maior grau para o de menor grau* (se houver coeficientes iguais a zero, estes devem ser incluídos também).

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline \end{array}.$$

Daqui para frente, o número 3 será chamado de **base** (veja a Seção 3, para algo indiretamente relacionado). Abaixo, explicaremos como preencher o restante do dispositivo passo a passo (isso também é feito na vídeo-aula).

No primeiro passo, apenas "baixamos" o primeiro coeficiente (ou seja, o repetimos na linha de baixo):

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & & & \end{array}.$$

Em cada passo seguinte, multiplicamos pela base o último número escrito na tabela (que até ali se encontra na posição mais à direita da linha de baixo) e somamos o resultado ao próximo coeficiente.

Assim, no segundo passo, fazemos $3 \cdot 1 + (-4) = -1$. O resultado, "-1", é escrito na linha de baixo da tabela.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}.$$

No terceiro passo, $3 \cdot (-1) + 5 = 2$. Daí,

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \end{array}.$$

Portal OBMEP

No quarto passo, fazemos $3 \times 2 + (-2) = 4$:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{4} \\ \cline{5-5} \end{array}.$$

Como não há mais coeficientes, o último número obtido representa o resto da divisão (4, nesse exemplo). Os demais números da linha de baixo, $(1, -1, 2)$, representam os coeficientes do quociente: $q(x) = x^2 - x + 2$.

Algumas pessoas preferem acrescentar uma linha intermediária ao dispositivo de Briot-Ruffini, deixando explícitas as operação de multiplicação e soma que estão sendo realizadas. Neste formato completo, o dispositivo acima, ficaria como segue:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & 3\ + & -3\ + & 6\ + \\ \hline & 1\ \cdot 3 & -1\ \cdot 3 & 2\ \cdot 3 & \multicolumn{1}{|c}{4} \\ \cline{5-5} \end{array}.$$

Exemplo 1. *Use o Dispositivo de Briot-Ruffini para calcular o quociente e o resto da divisão de* $p(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 4$ *por* $g(x) = x + 1$.

Solução. Como o divisor é $x + 1$, que é igual a $x - (-1)$, a base do dispositivo é -1. Não podemos esquecer também de acrescentar ao dividendo os monômios que possuem coeficiente zero. Como

$$p(x) = x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x + 4,$$

ao montar e executar o dispositivo de Briot-Ruffini obtemos (verifique as operações):

$$\begin{array}{c|cccccc} -1 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 4 & -4 & \multicolumn{1}{|c}{8} \\ \cline{7-7} \end{array}.$$

$\square$

Portal OBMEP

2 Justificativa

Há duas maneiras de justificar por que o método de Briot-Ruffini retorna o resto correto. A primeira é mais completa, pois justifica também a correção do quociente, mas é menos interessante e consiste em simplesmente observar que os passos executados são idênticos aos da divisão euclidiana, omitindo apenas as potências de x e termos duplicados. A segunda justificativa, que refere-se apenas ao resto, é dada na subseção seguinte, mas fornece uma melhor intuição sobre os cálculos efetuados (os mais curiosos podem ir diretamente para ela).

Por exemplo, compare a divisão de $p(x) = 4x^3 + 7x^2 + 8x + 13$ por $x - 2$, na forma da divisão euclidiana

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & +7x^2 & +8x & +13 & x-2 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & +8x^2 & & & 4x^2+15x+38 \\
\cline{1-2}
 & 15x^2 & +8x & & \\
 & -15x^2 & +30x & & \\
\cline{2-3}
 & & 38x & +13 & \\
 & & -38x & +76 & \\
\cline{3-4}
 & & & 89 &
\end{array}
$$

com o dispositivo de Briot-Ruffini

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 4 & 7 & 8 & 13 \\
 & & 8 & 30 & 76 \\
\hline
 & 4 & 15 & 38 & \multicolumn{1}{|c}{89} \\
\cline{5-5}
\end{array}.
$$

O primeiro passo da divisão euclidiana é dividir $4x^3$ por x, obtendo $4x^2$. Como o coeficiente de x no dividendo $(x-2)$ é igual a 1 (assim como em qualquer aplicação de Briot-Ruffini), o primeiro coeficiente do quociente será sempre igual ao primeiro do divisor. Isso corresponde ao primeiro passo de Briot-Ruffini, que apenas "baixa" o primeiro coeficiente, 4. A seguir, observe como o próximo coeficiente do quociente, 15, é obtido em Briot-Ruffini: multiplicamos 4 por 2, obtendo 8 e somamos isso a 7, obtendo o 15. Por sua vez, na divisão euclidiana temos o monômio $15x$ no quociente: ele vem da

Portal OBMEP

soma de $7x^2$ com $8x^2$ (que resulta em $15x^2$ que, por sua vez, no passo seguinte é dividido por x e produz o $15x$). Veja que $7x^2$ é justamente o "próximo monômio" do dividendo e corresponde naturalmente ao 7 que aparece em Briot-Ruffini. E de onde vem o $8x^2$? Na divisão euclidiana, multiplicamos $4x^2$ por $x-2$ e invertemos o sinal, escrevendo $-4x^3+8x^2$. Assim, o 8 de $8x^2$ vem justamente do produto $-4\cdot(-2) = 4\cdot 2$. Continue, observando que todos os demais números que aparecem em Briot-Ruffini também aparecem na divisão euclidiana e com a mesma justificativa. Por exemplo, em Briot-Ruffini temos $8+15\times 2 = 8+30 = 38$, correspondente à coluna em que fazemos $8x+30x = 38x$ na divisão euclidiana.

Isso deixa claro que Briot-Ruffini, no caso em que ele se aplica, produz o mesmo resultado que a divisão euclidiana (que já sabemos funcionar).

Outra explicação

A segunda justificativa (para o resto) vem de uma maneira esperta de rearranjar os termos do polinômio. Considere o mesmo polinômio da seção anterior, $p(x) = 4x^3+7x^2+8x+13$. Sabemos, do Teorema do Resto, que o resto da divisão por $x-2$ é simplesmente $p(2)$. Vamos rescrever $p(x)$ colocando x em evidência (exceto pelo termo independente):

$$p(x) = (4x^2+7x+8)x+13.$$

Depois, observe o polinômio em parênteses e faça isso novamente:

$$p(x) = \big((4x+7)x+8\big)x+13. \tag{1}$$

Nessa última expressão, note a presença dos passos executados para se calcular $p(2)$ (claro, com 2 no lugar de x):

$$p(2) = \big((4\cdot 2+7)\cdot 2+8\big)\cdot 2+13.$$

Multiplicamos 4 por 2 e somamos 7, multiplicamos o resultado por 2 e somamos 8, multiplicamos o resultado por 2 e somamos 13. Estes são exatamente os mesmos passos de Briot-Ruffini: em cada passo, multiplicamos o que temos pela base e somamos o coeficiente seguinte.

Portal OBMEP

Eficiência computacional

À primeira vista, pode parecer que Briot-Ruffini é um método mais trabalhoso de calcular o valor de $p(x)$ do que simplesmente substituir o valor de x na expressão original dos coeficientes $p(x)$. Mas isso não é verdade. Nesta seção, considere que $p(x)$ é um polinômio de grau n.

Seguindo a ideia do fim da subseção anterior, podemos até mesmo calcular o valor de $p(x)$ de cabeça. De fato, quando estamos interessados apenas no resto (e não no quociente), não é necessário memorizar toda a linha de baixo do dispositivo de Briot-Ruffini. Em cada passo, só precisamos lembrar do último número calculado para prosseguir. Esta consideração também vale do ponto de vista da implementação do método em uma linguagem de programação. O método requer alocação de apenas uma nova unidade de memória, além das $n+1$ posições já alocadas para guardar os coeficientes de $p(x)$.

A segunda vantagem é que Briot-Ruffini utiliza apenas operações de multiplicação e soma, nunca sendo necessário calcular potências; além de usar poucas dessas operações. De fato, para executar Briot-Ruffini, precisamos executar exatamente n multiplicações e n somas, para um total de $2n$ operações. Por outro lado, para calcular $p(x)$ usando a substituição direta, precisamos calcular cada uma das potências $x^2, \ldots, x^n$, depois, multiplicar x e cada destas potências por seus respectivos coeficientes e, por fim, realizar n somas, para um total de $3n-1$ operações. O cálculo de todas as potências, pode ser feito conjuntamente com $n-1$ multiplicações, pois para calcular x^i basta multiplicar x^{i-1} por x (para cada i). Isso não diminui o total de $3n-1$ operações necessárias para o cálculo de $p(x)$, mas pelo menos transforma todas as operações em somas e multiplicações. Contudo, os resultados dessas $n-1$ potências precisam ser salvos em $n-1$ novas unidades de memória para, mais tarde, serem multiplicados pelos seus coeficientes. O ganho fica mais evidente, quando temos calcular $p(x)$ de cabeça (ou fazendo uso de uma calculadora simples que pode realizar apenas operações de soma e

Portal OBMEP

multiplicação), para valores grandes ou valores não inteiros de x. O cálculo das potências pode sofrer sérios problemas de aproximação/arredondamento quando x tem muitas casas decimais.

Exercício 2. *Seja $p(x) = 2x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 6x + 8$. Tente calcular $p(1{,}5)$ usando Briot-Ruffini. Em seguida, faça o mesmo por substituição direta, calculando cada uma das potências $1{,}5^2$, $1{,}5^3$ e $1{,}5^4$. Qual dos métodos requer menos operações? Você conseguiria executar algum deles de cabeça? Confira seu resultado: $p(1{,}5) = 44$.*

Exemplo 3. *Dada $P(x) = x^3 - 10000x^2 - 10002x + 9999$, calcular $P(10001)$.*

Solução. Usando Briot-Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{r|cccc}
10001 & 1 & -10000 & -10002 & 9999 \\
\hline
 & 1 & 1 & -1 & \multicolumn{1}{|c}{-2}
\end{array}.$$

Assim, temos que $P(10001) = -2$. □

As vantagens de Briot-Ruffini ficam ainda mais evidentes quando o valor de x é um número complexo não real, já que calcular potências de números complexos é algo claramente trabalhoso. Contudo, fazer esses casos de cabeça já não é tarefa simples.

Exemplo 4. *Calcule o valor de $f(2+i)$ para o polinômio $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x + 8$, usando Briot-Ruffini.*

Solução. A tabela abaixo mostra como fica o dispositivo.

$$\begin{array}{r|crrr}
2+i & 3 & -2 & 7 & 8 \\
 & & 6+3i & 5+10i & 14+32i \\
\hline
 & 3 & 4+3i & 12+10i & 22+32i
\end{array}$$

Primeiro multiplicamos $3\cdot(2+i)$ e somamos o resultado, $6+3i$, com -2, obtendo $4+3i$. Depois, multiplicamos $(4+3i)(2+i)$ e somamos o resultado, $5+10i$, com 7, obtendo $12+10i$. Por fim, multiplicamos $(12+10i)(2+i)$ e somamos o resultado, $14+32i$, com 8. O resultado final é $22+32i$. □

Portal OBMEP

Os coeficientes dos polinômios também podem ser números não reais. Isso não dificulta a utilização do dispositivo.

Exemplo 5. *Seja $f(x) = 2ix^3 + (-2+3i)x^2 + 7x + i$. Calcule o valor de $f(2+i)$.*

Solução. Usando Briot-Ruffini obtemos:

$$\begin{array}{c|cccc} 2+i & 2i & -2+3i & 7 & i \\ & & -2+4i & -15+10i & -26+12i \\ \hline & 2i & -4+7i & -8+10i & -26+13i \end{array}.$$

Logo, $f(2+i) = -26+13i$. □

Exemplo 6. *Use o Teorema do Resto para descobrir se $x = -4$ é uma solução da equação*

$$x^6 + 5x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 10x - 8 = 0.$$

Solução. Se a questão não pedisse para usar o Teorema do Resto, "bastaria" substituir x por -4 na expressão do enunciado e verificar se o resultado é zero. Contudo, isso envolveria o cálculo com potências grandes, uma vez que $(-4)^6 = 4096$.

Seja $p(x) = x^6+5x^5+5x^4+5x^3+2x^2-10x-8$. Queremos calcular $p(-4)$. Pelo Teorema do Resto, isso é igual ao resto da divisão de $p(x)$ por $x+4$, o que pode ser calculado via Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccccc} -4 & 1 & 5 & 5 & 5 & 2 & -10 & -8 \\ & & -4 & -4 & -4 & -4 & 8 & 8 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & \boxed{0} \end{array}.$$

Como o resto é zero, segue que $p(-4) = 0$, logo, -4 é raiz da equação do enunciado. □

Desvantagem de Briot-Ruffini

Apesar do método de Briot-Ruffini ser, em geral, computacionalmente mais eficiente, em certos casos o método da

Portal OBMEP

substituição direta pode ser mais vantajoso. Por exemplo, quando muitos dos coeficientes são iguais a zero ou quando o valor de x a ser substituído é igual a 0, 1 ou -1.

Além disso, há de se levar em consideração que, para polinômios pequenos e valores inteiros de x o risco do leitor errar ao aplicar Briot-Ruffini é maior do que fazendo uma substituição direta, pois há mais pontos nos quais podemos nos confundir. Sem auxílio de um computador ou de uma calculadora, é difícil de perceber quando pequenos erros são cometidos durante uma execução genérica de Briot-Ruffini. O leitor precisa tomar bastante cuidado para não confundir a ordem das operações de multiplicação e soma, especialmente no primeiro e no último passo do método, assim como para não confundir a ordem em que os coeficientes são percorridos no dispositivo.

Uma maneira de lembrar desses detalhes do método é escrevendo o polinômio $p(x)$ seguindo o modelo da equação 1.

3 Mudança de Base

Terminamos esta aula com uma aplicação. No Módulo "Sistemas de Numeração e Paridade" da seção "Tópicos Adicionais", aprendemos como representar um número natural em um sistema numérico de base b, em que b é um número natural maior ou igual a 2.

Se $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0)_b$ é a representação de certo número em base b, então para obter o valor deste número em base 10 precisamos calcular:

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0.$$

Ora, a expressão acima é uma expressão polinomial em b, com coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$. Logo, pode ser calculada de forma eficiente usando Briot-Ruffini.

Exemplo 7. *Seja* $(23421)_7$ *a representação de um número em base* 7*. Converta este número para base* 10*.*

Portal OBMEP

Solução. O valor desse número em base 10 é igual a:

$$2 \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1.$$

Seja $p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$. Queremos calcular $p(7)$, o que pode ser feito da seguinte maneira usando Briot-Ruffini com base 7:

$$\begin{array}{c|ccccc}
7 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\
 & & 14 & 119 & 861 & 6041 \\
\hline
 & 2 & 17 & 123 & 863 & \multicolumn{1}{|c}{6042} \\
\cline{6-6}
\end{array}.$$

Logo, este número vale 6042 em base 10. □

O fato de termos um sistema numérico impõe a condição adicional de que $0 \leq a_i < b$ para todo i. Isso é importante apenas para que haja unicidade na representação de um número em base b, mas não é relevante na aplicação de Briot-Ruffini.

Além disso, para termos um sistema de numeração, exigimos que a base seja um natural maior ou igual a 2. De toda forma, abusamos da nomenclatura, e continuamos a chamar de "base" o número que é usado como base dos cálculos no dispositivo de Briot-Ruffini. Afinal, tal número também pode ser considerado como base no sentido amplo de base de uma potência.

Portal OBMEP

Aprofundamento

Exercício 8. *A função $p(x) = x^3 + ix^2 + 7x + m$ é divisível por $g(x) = x - 2i$. Calcule m e o quociente da divisão em questão.*

Solução. Pode ser vista na vídeo-aula "Dispositivo de Briot-Ruffini: Exercícios – Parte 1". □

Exercício 9. *Calcule o resto da divisão de $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5$ por $g(x) = (x - 1)(x + 2)$.*

Solução 1 (Ideia). (Os detalhes podem ser vistos na vídeo-aula “Dispositivo de Briot-Ruffini: Exercícios – Parte 2”).

Use Briot-Ruffini para calcular o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $x-1$ e escreva:

$$p(x) = (x-1)q_1(x) + r_1.$$

Use Briot-Ruffini novamente, desta vez para dividir $q_1(x)$ por $x+2$, obtendo:

$$q_1(x) = (x+2)q_2(x) + r_2.$$

Substitua essa expressão para $q_1(x)$ na primeira equação e conclua que o resto da divisão de $p(x)$ por $g(x)$ será igual a $(x-1)r_2 + r_1$. □

Solução 2 (ideia). Seja $r(x)$ o resto da divisão. Como $g(x)$ tem grau 2, temos que $r(x)$ tem grau no máximo 1. Logo, $r(x) = ax + b$. Temos, ainda, que

$$p(x) = (x-1)(x+2)\,q(x) + r(x).$$

Veja que $r(1) = p(1)$ e $r(-2) = p(-2)$. Use Briot-Ruffini para calcular $p(1)$ e $p(-2)$. De posse desses valores podemos obter a e b resolvendo um sistema linear de duas equações e duas incógnitas. □

Portal OBMEP

Dicas para o Professor

Sugerimos que conteúdo seja coberto em dois encontros de 50 minutos. É importante realizar muitos exercícios para que os alunos se acostumem com a ordem em que as operações de Briot-Ruffini são realizadas. Nesse sentido, exercícios mais complexos podem ser encontrados nas referências a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios, Equações*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.

Portal OBMEP