Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Regra da Cadeia - Exercícios - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

21 de Fevereiro de 2025

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Continuamos a apresentar exemplos para cujas soluções fazemos uso da regra da cadeia.

1 Exemplos

Exemplo 1. Calcule a derivada da função racional

$$R(x) = (x-1)^{2024} + \frac{1}{(x^2-2x+4)^{2025}}.$$

Solução. Pela regra da cadeia,

$$\frac{d((x-1)^{2024})}{dx} = 2024(x-1)^{2023},$$

enquanto

$$\frac{d((x^2-2x+4)^{-2025})}{dx} = -2025(x^2-2x+4)^{-2026}\cdot(2x-2).$$

Logo,

$$R'(x) = 2024(x-1)^{2023} - \frac{5050(x-1)}{(x^2-2x+4)^{2026}}.$$

□

Observação 2. Em relação ao exemplo anterior, também poderíamos ter observado que $R(x) = f(g(x))$, com

$$f(y) = y^{1012} + (y+3)^{-2025} \quad \text{e} \quad g(x) = (x-1)^2.$$

Sugerimos ao leitor que refaça o cálculo nesses termos.

Exemplo 3. O *momento linear* p de uma partícula, que em um determinado instante tem massa m e velocidade v, calcula-se como $p = mv$.

Assim, a forma geral da 2ª lei de Newton afirma que *a força resultante F que age na partícula é a taxa de variação instantânea de seu momento*:

$$F = \frac{dp}{dt}. \tag{1}$$

Essa formulação é particularmente útil no caso em que a massa sofre variações consideráveis no intervalo de tempo estudado. [1]

Por outro lado, se a alteração da massa for desprezível, permitindo considerar m como uma constante, reobtemos a versão familiar da segunda lei:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = ma,$$

sendo $a = \frac{dv}{dt}$ a aceleração.

De acordo com a *Teoria da Relatividade*, a massa m e a velocidade v da partícula relacionam-se por meio da igualdade

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{2}$$

em que m_0 é a massa da partícula em repouso e c é a velocidade da luz[2]. (A esse respeito veja, por exemplo, o capítulo 6 da referência [3].)

Prove que

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Solução. A relação (3) segue facilmente de (1), (2) e das regras de derivação:

$$\begin{aligned}
F = \frac{d(mv)}{dt} &= \frac{d\Big((m_0 v) \cdot (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\Big)}{dt} \\
&= \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + m_0 v \cdot \left(\frac{\cancel{-2} va/c^2}{\cancel{-2}(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{m_0 a[(1 - v^2/c^2) + v^2/c^2]}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \\
&= \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

$\square$

[1] Por exemplo, a massa total de um foguete nos primeiros instantes após seu lançamento.

[2] Nesse sentido, apenas grandes velocidades causam variações consideráveis de massa; observe ainda que $m \to +\infty$ quando $v \to c^-$.

Exemplo 4. Mostre que a regra do quociente para a derivada é consequência da regra do produto de Leibniz e da regra da cadeia.

Solução. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis no ponto a, com $g(a) \neq 0$. Sendo g contínua em a, vale $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ suficientemente próximo de a. Assim, para tais x, a função $\frac{1}{g}$, composta de g com a função recíproco $0 \neq y \mapsto 1/y$ e que, portanto, associa a cada um de tais x o real $g(x)^{-1}$, está bem definida e é derivável em a, pela regra da cadeia.

Portanto, a regra do produto (de Leibniz) assegura a existência da derivada da função quociente $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ no ponto a. Utilizando as fórmulas dessas regras, obtemos

$$\left.\frac{d(f(x)/g(x))}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d(f(x) \cdot g(x)^{-1})}{dx}\right|_{x=a}$$

$$\begin{aligned} &= f'(a) \cdot g(a)^{-1} + f(a) \cdot \left.\frac{d(g(x)^{-1})}{dx}\right|_{x=a} \\ &= \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)(-g(a)^{-2}g'(a)) \\ &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável na origem, tal que $f(0) = 0$ e $f(f(x)) \geq x$ para todo x real. Calcule os possíveis valores de $f'(0)$.

Solução. Começamos notando que $f(f(0)) = 0$. Daí, se x for positivo, a condição $f(f(x)) \geq x$ equivale a

$$\frac{f(f(x)) - f(f(0))}{x - 0} \geq 1. \tag{4}$$

O primeiro membro dessa desigualdade é o quociente de Newton da função composta $f \circ f$ na origem. Como f é derivável em $0 = f(0)$, a regra da cadeia assegura a diferenciabilidade de $f \circ f$ nesse mesmo ponto, com

$$(f \circ f)'(0) = f'(f(0))f'(0) = f'(0)^2.$$

Logo, fazendo $x \to 0^+$ em 4, vem que $f'(0)^2 \geq 1$.

Por outro lado, se x for negativo, teremos

$$\frac{f(f(x)) - f(f(0))}{x - 0} \leq 1,$$

o que, ao se fazer $x \to 0^-$, dá $f'(0)^2 \leq 1$.

A conclusão é de que $f'(0)^2 = 1$, ou seja, $f'(0) = \pm 1$.

Por fim, observe que ambos os valores acima são realmente possíveis: a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ (resp. $f(x) = -x$) para todo $x \in \mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses do enunciado e é tal que $f'(0) = 1$ (resp. $f'(0) = -1$). $\square$

É comum utilizarmos a regra da cadeia apenas para garantir a diferenciabilidade de uma função composta, dispensando a fórmula expressa na regra. Os exemplos 8 e 9 ilustram esse ponto. Aliás, a proposição abaixo estende essa garantia a classes mais altas de diferenciabilidade [3].

Proposição 6. *Sejam $g : J \to I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ funções n vezes deriváveis nos pontos $x_0 \in J$ e $g(x_0) \in I$, respectivamente. Então, a composta $f \circ g : J \to \mathbb{R}$ é n vezes derivável no ponto x_0.*

Em particular, a composição de funções n vezes deriváveis (resp. suaves) é n vezes derivável (resp. suave).

Prova. Utilizaremos indução em n, sendo a base de indução, $n = 1$, parte da regra da cadeia.

Supondo o resultado verdadeiro para um certo natural $n \geq 1$, sejam, nas notações do enunciado, g e f funções $n + 1$ vezes deriváveis em x_0 e $g(x_0)$, respectivamente. Então, g é n vezes derivável em x_0 e f' é n vezes derivável em $g(x_0)$, de sorte que, pela hipótese de indução, $f' \circ g$ é n vezes derivável

[3] Quanto à fórmula para a n-ésima derivada de uma composta, confira a seção *Dicas para o Professsor*.

em x_0 [4]. Como g' também é n vezes derivável em x_0, o fato de que o produto de funções n vezes deriváveis em um ponto ainda é n vezes derivável nesse mesmo ponto garante a existência da n-ésima derivada, em x_0, da função

$$(f' \circ g) \cdot g' = (f \circ g)'.$$

Portanto, $f \circ g$ é $n + 1$ vezes derivável em x_0. $\square$

Na seção *Dicas para o Professor* da aula *Propriedades - Parte II*, do módulo *Derivada como Função*, enunciamos a fórmula de Leibniz para a n-ésima derivada[5] $(f \cdot g)^{(n)}(x_0)$ de um produto de funções f e g, ambas n vezes deriváveis no ponto x_0:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x_0) \cdot g^{(n-j)}(x_0). \tag{5}$$

Dela, segue que $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$ implica $(f \cdot g)^{(k)}(x_0) = 0$ para todo $0 \le k \le n$. Utilizaremos essa observação no

Exemplo 7. Nas hipóteses do exemplo 6, suponha $g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$. Mostre que

$$(f \circ g)'(x_0) = \ldots = (f \circ g)^{(n)}(x_0) = 0.$$

Solução. Podemos escrever

$$g'(x_0) = (g')'(x_0) = \ldots = (g')^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Portanto, sendo $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$, a observação anterior ao exemplo, com $n - 1$ no lugar de n, dá

$$(f \circ g)^{(k+1)}(x_0) = [(f \circ g)']^{(k)}(x_0) = 0, \text{ para } 0 \le k \le n - 1.$$

Isso significa que $(f \circ g)'(x_0) = \ldots = (f \circ g)^{(n)}(x_0) = 0$. $\square$

[4] Pode ocorrer de f' não estar definida em todo o intervalo I, mas deve estar definida em uma vizinhança de $g(x_0)$. Daí, sendo g contínua em x_0, é fácil ver que $f' \circ g$ está bem definida numa vizinhança de x_0.

[5] Observe a *semelhança formal* da expressão do segundo membro com a fórmula da expansão binomial: em $(a + b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$, basta trocar a^j por $f^{(j)}(x_0)$ e b^{n-j} por $g^{(n-j)}(x_0)$, o que torna bastante simples recordar a fórmula para $(f \cdot g)^{(n)}(x_0)$.

Exemplo 8. Sejam $n > 1$ um número natural fixado e $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto 1 e tal que $f(x^n) = nf(x)$ para todo $x > 0$. Mostre que f, se não for constante, é uma função logarítmica.

Solução. Sendo $e^0 = 1$ e $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a regra $g(x) = f(e^x)$ define uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável na origem, de acordo com a regra da cadeia.

Pela hipótese,

$$g(nx) = f((e^x)^n) = nf(e^x) = ng(x),$$

de sorte que

$$g(x) = g(n(x/n)) = ng(x/n),$$

para todo $x > 0$. Daí, é fácil estabelecer, por indução matemática, a relação

$$g(x) = n^k g(x/n^k), \quad \forall\, x > 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Como $g(0) = g(n \cdot 0) = ng(0)$ e $n > 1$, temos $g(0) = 0$. Por outro lado, pondo $h_k := x/n^k$, em que $x \neq 0$, segue que $h_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Assim,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{g(x/n^k)}{x/n^k} \cdot x = \lim_{k\to+\infty} \frac{g(x/n^k)}{x/n^k} \cdot x \\ &= \lim_{k\to+\infty} \frac{g(h_k) - g(0)}{h_k - 0} \cdot x = g'(0) \cdot x, \end{aligned}$$

isto é, g é linear. Como f não é constante, g também não o é, ou seja, $g'(0) \neq 0$. Daí, pela sobrejetividade da função ln, vale $1/g'(0) = \ln a$, isto é, $g'(0) = 1/\ln a$ para algum $0 < a \neq 1$. Portanto,

$$f(x) = g(\ln x) = g'(0) \cdot \ln x = \log_a x,$$

o que demonstra a relação $f = \log_a$. $\square$

Exemplo 9. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função derivável que comuta com a função quadrática $x \mapsto x^2$, ou seja, tal que

$$f(x^2) = f(x)^2 \tag{6}$$

para todo $x > 0$. Se f não for identicamente nula, mostre que existe um número real k tal que $f(x) = x^k$ para cada x positivo.

Solução. Afirmamos que $f \equiv 0$ se, e só se, $f(1) = 0$.

Primeiramente, observe que

$$f(x) = f\big(\sqrt{x}^{\,2}\big) = f\big(\sqrt{x}\big)^2$$

para todo $x \in (0, +\infty)$. Em particular, $f \geq 0$. Da relação acima, também é fácil concluir, por indução matemática, que

$$f(x) = f\big(\sqrt[2^n]{x}\big)^{2^n}$$

para cada $x > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se tivermos $f(1) = 0$, a continuidade de f no ponto 1 garantirá $f(x) \approx 0$ para todo $x \approx 1$. Nesse caso, fixado $x_0 > 0$, a igualdade [6]

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[2^n]{x_0} = 1$$

assegura que, para todo natural n suficientemente grande, $\sqrt[2^n]{x_0}$ estará próximo de 1 o suficiente para que sua imagem por f esteja próximo de $f(1) = 0$ a menos de $1/2$. Em símbolos, $0 \leq f\big(\sqrt[2^n]{x_0}\big) < 1/2$ para todo n suficientemente grande. Logo, para tais n,

$$f(x_0) = f\big(\sqrt[2^n]{x_0}\big)^{2^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n},$$

de onde segue que

$$0 \leq f(x_0) \leq \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0.$$

[6] Confira o exemplo 8 da aula *Teorema do Sanduíche*, no módulo *Leis do Limite - Parte 2*.

A conclusão é que $f(x_0) = 0$ e, portanto, $f \equiv 0$. A afirmação acima está, pois, demonstrada.

Em particular, ou $f \equiv 0$ ou $f > 0$. Realmente, se for $f(x_0) = 0$ para algum $x_0 > 0$, teremos $f\big(\sqrt[2^n]{x_0}\big) = 0$ para todo n natural, de modo que

$$f(1) = f\Big(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{x_0}\Big) = \lim_{n\to+\infty} f\big(\sqrt[2^n]{x_0}\big) = 0;$$

pela afirmação do início, $f \equiv 0$.

Portanto, supondo $f \not\equiv 0$, concluímos que f será positiva. Daí, definindo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \ln f(x)$, segue da regra da cadeia que g é derivável. Além disso,

$$\begin{aligned} g(x^2) &= \ln f(x^2) = \ln f(x)^2 \\ &= 2\ln f(x) = 2g(x). \end{aligned}$$

Pelo exemplo anterior, g é uma função logarítmica, digamos, $g = \log_a$ para algum real $0 < a \neq 1$. Pondo $k = \log_a e$, vem que

$$f(x) = e^{g(x)} = (a^k)^{\log_a x} = x^k$$

para cada $x > 0$. □

Exemplo 10 (IMC - 2006). Compare $\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)$ com $\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)$ para todo $x \in (0, \pi/2)$.

Solução. Afirmamos que $\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x) > \operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)$ para todo $x \in (0, \pi/2)$.

Como sen aplica $(0, \pi/2)$ sobre $(0, 1) \ni \pi/4$, existe um valor $x_0 \in (0, \pi/2)$ tal que $\operatorname{sen} x_0 = \pi/4$. Fazendo uma pequena digressão, vale notar que $\operatorname{tg} x_0 < \pi/2$. Realmente,

$$\operatorname{tg} x_0 = \frac{\operatorname{sen} x_0}{\cos x_0} < \pi/2 \Leftrightarrow \frac{\pi/4}{\sqrt{1 - (\pi/4)^2}} < \pi/2,$$

o que, por sua vez, equivale a $1 < 4 - 4(\pi/4)^2$, ou seja, $\pi^2 < 12$, uma desigualdade verdadeira.

Agora, sendo sen e tg crescentes no primeiro quadrante, o mesmo se pode afirmar da composição $\operatorname{tg} \circ \operatorname{sen}$, de sorte que

$$x_0 < x < \pi/2 \Rightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x) > \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x_0) = \operatorname{tg} \pi/4 = 1.$$

Portanto,

$$x_0 < x < \pi/2 \Rightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) > 1 - \operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) \geq 0,$$

o que justifica a afirmação relativamente ao intervalo $(x_0, \pi/2)$.

Quanto ao intervalo $(0, x_0]$, considere $f : [0, x_0] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}(\operatorname{tg} x).$$

Precisamos estabelecer a desigualdade $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, x_0]$. Observando que $f(0) = 0$, a desigualdade procurada será uma consequência do lema 9 da aula *Exercícios - Parte I*, do módulo anterior, se provarmos que $f' > 0$ em $(0, x_0]$.

Utilizando a regra da cadeia, conclui-se que f é derivável, valendo

$$f'(x) = \sec^2(\operatorname{sen} x)\cos x - \cos(\operatorname{tg} x)\sec^2 x,$$

ou seja,

$$f'(x) = \sec^2 x \cdot \sec^2(\operatorname{sen} x)(\cos^3 x - \cos^2(\operatorname{sen} x)\cos(\operatorname{tg} x)).$$

Assim, basta mostrar que a expressão dentro dos parênteses é positiva se $x \in (0, x_0]$.

Caso contrário, isto é, se tivéssemos $f'(t) \leq 0$ para algum $t \in (0, x_0]$, valeria

$$\cos t \leq \cos^{2/3}(\operatorname{sen} t)\cos^{1/3}(\operatorname{tg} t).$$

Aqui, convém definir a função $g : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, de regra $g(x) = \ln(\cos x)$. g é estritamente côncava, pois $g'(x) = -\operatorname{tg} x$ e, portanto, $g''(x) = -\sec^2 x < 0$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Uma vez que $0 < t \leq x_0 \Rightarrow 0 < \operatorname{sen} t < \operatorname{tg} t \leq \operatorname{tg} x_0 < \pi/2$, vemos que $\operatorname{sen} t$ e $\operatorname{tg} t$ pertencem ao domínio de g. Então, pela desigualdade de Jensen com pesos $2/3$ e $1/3$, relativos aos pontos $\operatorname{sen} t$ e $\operatorname{tg} t$, respectivamente, vem que

$$\frac{2g(\operatorname{sen} t)}{3} + \frac{g(\operatorname{tg} t)}{3} < g\left(\frac{2\operatorname{sen} t + \operatorname{tg} t}{3}\right).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\ln\left(\cos\left(\frac{2\operatorname{sen} t+\operatorname{tg} t}{3}\right)\right) &> \frac{2\ln(\cos(\operatorname{sen} t))}{3}+\frac{\ln(\cos(\operatorname{tg} t))}{3}\\ &=\ln(\cos^{2/3}(\operatorname{sen} t)\cos^{1/3}(\operatorname{tg} t))\\ &\geq \ln(\cos t),\end{aligned}$$

o que, pelo fato de g ser decrescente no 1º quadrante, implica $2\operatorname{sen} t+\operatorname{tg} t<3t$.

Ocorre que essa desigualdade é falsa. De fato, vale

$$2\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x>3x,\quad \forall\, x\in(0,\pi/2).$$

Para tanto, basta definir $h(x)=2\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x-3x$, para $0\leq x<\pi/2$, e mostrar que $h>0$ em $(0,\pi/2)$. Calculando

$$h'(x)=2\cos x+\sec^2 x-3 \quad\text{e}\quad h''(x)=2\operatorname{sen} x(\sec^3 x-1),$$

as condições $h(0)=h'(0)=0$ e $h''>0$ em $(0,\pi/2)$ permitem, via lema 9 da aula citada acima, concluir que $h>0$ em $(0,\pi/2)$.

Portanto, devemos ter $f'>0$ em $(0,x_0]$, o que, conforme já comentamos, implica $\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)>\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)$ nesse mesmo intervalo. Isso encerra a justificativa da afirmação inicial e conclui a solução. $\square$

Dicas para o Professor

Se g é n vezes derivável no ponto a e f é n vezes derivável no ponto $g(a)$, a fórmula que segue, conhecida na literatura como *fórmula de Faà di Bruno*, expressa a n-ésima derivada da composição $f\circ g$ no ponto a em termos das derivadas de ordens $\leq n$ de g em a e de f em $g(a)$:

$$(f\circ g)^{(n)}(a)=\sum\frac{n!f^{(b_1+\ldots+b_n)}(g(a))}{b_1!b_2!\ldots b_n!}\left(\frac{g'(a)}{1!}\right)^{b_1}\left(\frac{g''(a)}{2!}\right)^{b_2}\cdots\left(\frac{g^{(n)}(a)}{n!}\right)^{b_n}, \tag{7}$$

em que o somatório se estende sobre cada $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, uma n-upla de inteiros não negativos, satisfazendo $\sum_{j=1}^{n} jb_j = n$.

Não precisaremos dessa fórmula para calcular as sucessivas derivadas de uma função composta. De fato, para obter $(f \circ g)^{(n)}(a)$, basta iterar $n-1$ vezes o cálculo da derivada, se valendo da regra da cadeia e das demais regras de derivação. Há, contudo, casos relevantes de aplicação da fórmula de Faà di Bruno (vide [5]).

Se o Professor desejar ilustrar a fórmula (7), sugerimos o cálculo da n-ésima derivada, na origem, da função composta $x \mapsto f(x^n)$, sendo f uma função n vezes derivável. Com auxílio de (7), não será difícil verificar que

$$\left.\frac{d^n(f(x^n))}{dx^n}\right|_{x=0} = n!f'(0).$$[7]

Além disso, o exemplo 7 também segue diretamente da fórmula (7).

Durante a solução do exemplo 8, estabelecemos um fato interessante: *se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função derivável na origem e tal que, para um certo natural $n > 1$, $g(nx) = ng(x)$ para todo número real x, então g é linear.* Essa proposição foi publicada no artigo [6] pelo matemático húngaro Peter Lax.

Por fim, ainda em relação ao exemplo 8, o leitor deve ter percebido que se trata do exemplo 7 da primeira aula desse módulo, com a hipótese enfraquecida. Aliás, a solução lá apresentada também estabelece um fato digno de registro: *as únicas soluções contínuas $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ da equação funcional $g(x^n) = g(x)$, sendo $n > 1$ um número natural, são as funções constantes.*

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

[7] Caso o leitor esteja familiarizado com a *fórmula infinitesimal de Taylor* (vide [3], teorema 1 do capítulo 20), poderá concluir essa relação em poucas linhas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

3. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica, Volume 4 - Ótica, Relatividade e Física Quântica*, 2ª ed. São Paulo, Edgard Blücher, 2014.

4. M. Spivak. *Calculus*, 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.

5. E. Lukacs. *Applications of Faà Di Bruno's Formula in Mathematical Statistics*. The American Mathematical Monthly, vol. 62, nº 5 (mai, 1955), pp. 340 - 348.

6. P. D. Lax. *A curious functional equation.* Journal d'Analyse Mathématique 105, 383–390 (2008).