Material Teórico - Módulo Binômio de Newton e Triangulo de Pascal

Desenvolvimento Multinomial

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Desenvolvimento Multinomial

Nosso objetivo neste material é generalizar a fórmula da expansão do binômio de Newton $(x+y)^n$. Mais especificamente, queremos substituir o binômio $x+y$ pelo trinômio $x+y+z$ ou, de forma mais geral, por uma soma de k monômios quaisquer. Em resumo, queremos calcular os coeficientes de cada um dos monômios obtidos na expansão de uma expressão do tipo $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$, onde k e n são inteiros positivos.

Lembre-se de que, conforme demonstramos no material sobre o binômio de Newton, temos:

Binômio de Newton:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{j}x^{n-j}y^j + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

O argumento que utilizaremos aqui é basicamente idêntico ao que havíamos usado para demonstrar o fato acima, e será ilustrado novamente através de um exemplo.

Exemplo 1. *Encontre o coeficiente de xy^2z no desenvolvimento de $(x+y+z)^4$.*

Solução. Observe que desenvolver $(x+y+z)^4$ é o mesmo que calcular o produto

$$(x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot(x+y+z)$$

incialmente utilizando a propriedade distributiva da multiplicação e, em seguida, simplificando o resultado pelo agrupamento dos *termos semelhantes* (i.e., repetidos).

Antes de agruparmos os termos repetidos, o resultado é uma soma de parcelas, cada uma das quais sendo obtida escolhendo uma variável (ou seja, x, y ou z) em cada um dos quatro fatores acima e, em seguida, multiplicando as quatro variáveis escolhidas. Por exemplo, a parcela $x\cdot x\cdot x\cdot x = x^4$ é obtida escolhendo x em cada um dos quatro fatores, como segue:

$$(\underline{x}+y+z)\cdot(\underline{x}+y+z)\cdot(\underline{x}+y+z)\cdot(\underline{x}+y+z).$$

Por outro lado, a parcela $x\cdot y\cdot z\cdot y = xy^2z$ corresponde à seguinte escolha:

$$(\underline{x}+y+z)\cdot(x+\underline{y}+z)\cdot(x+y+\underline{z})\cdot(x+\underline{y}+z).$$

Pelo princípio fundamental da contagem temos $3^4 = 81$ maneiras de escolher uma variável de cada fator. Portanto, antes de agruparmos os termos repetidos, teríamos uma soma de 81 parcelas, de modo que seria inviável calcular cada uma delas.

Por outro lado, várias dessas parcelas são iguais. Por exemplo, xy^2z pode ser obtida como acima (como o produto $xyzy$, nessa ordem), como $xyyz$, como $yzxy$ e de várias outras maneiras. Na forma simplificada do desenvolvimento de $(x+y+z)^4$, o coeficiente de um determinando termo representa justamente o número de parcelas iguais a ele, dentre as 81 parcelas possíveis. Em particular, o coeficiente de xy^2z é igual ao número de parcelas nas quais escolhemos uma vez a variável x, duas vezes a variável y e uma vez a variável z. Isso é precisamente o número de anagramas de $xyyz$ e, portanto, pode ser obtido através da fórmula para o número de permutações com elementos repetidos:

$$P_4^{1,2,1} = \frac{4!}{1!\,2!\,1!} = \frac{24}{2} = 12.$$

Logo o coeficiente de xy^2z na expansão $(x+y+z)^4$ de é igual a 12. $\square$

De forma um pouco mais geral que no exemplo anterior, para todo natural n, todos os termos do desenvolvimento de $(x+y+z)^n$ são da forma $x^ay^bz^c$, onde a, b e c são inteiros não negativos tais que $a+b+c=n$ (ressaltamos que é permitido que a, b ou c sejam nulos).

De forma mais geral ainda, dados naturais n e k, com $k\geq 2$, e k variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_k$, temos que todos os termos do desenvolvimento de $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ são da forma $x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{n_k}$ onde $n_1+\cdots+n_k=n$ e $n_1,\ldots,n_k$ são inteiros não negativos. De fato, temos

$$(x_1+\cdots+x_k)^n = \underbrace{(x_1+\cdots+x_k)\cdot\ldots\cdot(x_1+\cdots+x_k)}_{n \text{ vezes}} \tag{1}$$

e, ao executarmos as multiplicações do segundo membro distributivamente, os inteiros não negativos n_1, n_2, ..., n_k representam exatamente os números de vezes que escolhemos x_1, x_2, ..., x_k, respectivamente, nos n fatores acima.

A discussão acima sugere a seguinte definição:

Coeficientes multinomiais: em analogia aos coeficientes binomiais, dado um inteiro $k\geq 2$ e inteiros não negativos n e n_1, n_2, ..., n_k tais que $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, definimos o número multinomial, $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, como o coeficiente de $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ na expansão de $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$.

Por outro lado, utilizando a notação de somatórios, obtemos a fórmula do:

Desenvolvimento Multinomial:

$$(x_1+\cdots+x_k)^n =$$
$$= \sum_{n_1+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}.$$

Resta, então, determinarmos como calcular o valor dos coeficientes multinomiais de forma direta. Observe que, quando $k=2$, temos $n_1+n_2=n$ e, pelo binômio de

Newton, o coeficiente de $x_1^{n_1}x_2^{n_2}$ (ou seja, de $x_1^{n_1}x_2^{n-n_1}$) no desenvolvimento de $(x_1+x_2)^n$ é igual a

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!}.$$

Para o caso geral vale o seguinte teorema.

Teorema 2 (Teorema Multinomial). *Dados inteiros não negativos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tais que $n_1+n_2+\cdots+n_k = n$, o coeficiente de $x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{n_k}$ no desenvolvimento de $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ é igual a:*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}.$$

Prova. Conforme nossa discussão anterior, $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ representa o coeficiente de $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ na expansão de $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$.

Usando a mesma argumentação do Exemplo 1, temos um produto de n cópias de $(x_1+x_2+\cdots+x_k)$ e devemos escolher uma variável de cada uma dessas cópias, de forma que a variável x_i seja escolhida exatamente n_i vezes (para cada i de 1 até k). O coeficiente desejado é o número de maneiras em que isso pode ser feito.

Veja que o problema combinatório do parágrafo anterior coincide com aquele de calcular o número de anagramas de uma palavra com n letras, formada utilizando-se as letras x_1, x_2, ..., x_k de modo que, para cada i de 1 a k, a letra x_i apareça exatamente n_i vezes. Isso porque cada um desses anagramas define a ordem em que os x_i's serão escolhidos nos n fatores $x_1+x_2+\cdots+x_n$.

Como vimos no material sobre permutações com repetições, a quantidade de tais anagramas é precisamente

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}.$$

Sendo assim,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}.$$

□

Exemplo 3. *Qual o coeficiente de $x^3y^4z^2w$ no desenvolvimento de $(x+y+z+w)^{10}$? E o coeficiente de x^6y^4 no mesmo desenvolvimento?*

Solução. Basta aplicar o Teorema Multinomial diretamente: o coeficiente de $x^3y^4z^2w$ é igual a

$$\binom{10}{3,4,2,1} = \frac{10!}{3!\,4!\,2!\,1!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{3!}\cdot\cancel{4!}\cdot 2} = 12.600.$$

Observe que x^6y^4 pode ser visto como $x^6y^4z^0w^0$. Como $4+6=10$ e $0!=1$, temos (novamente pelo Teorema Multinomial) que o coeficiente de x^6y^4 é igual a

$$\binom{10}{6,4,0,0} = \binom{10}{6,4} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{4!\,\cancel{6!}} = 210.$$

□

Exemplo 4. *Qual o coeficiente de x^4y^4 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$?*

Solução. Aqui temos que tomar cuidado, pois, como $4+4\neq 10$, não faz sentido falarmos do número multinomial $\binom{10}{4,4}$.

Por outro lado, resolvemos esse problema notando que basta aplicarmos o Teorema Multinomial para a expansão de $(x_1+x_2+x_3)^{10}$ com $x_1=1$, $x_2=x$ e $x_3=y$. Assim o coeficiente de x^4y^4 na expressão inicial é igual ao coeficiente de $x_1^2x_2^4x_3^4$ na expansão $(x_1+x_2+x_3)^{10}$. Este último coeficiente é igual a

$$\binom{10}{2,4,4} = \frac{10!}{2!\,4!\,4!} = 3.150.$$

□

Uma relação importante entre número binomiais e multinomiais é dada no próximo exemplo.

Exemplo 5. *Mostre que o número multinomial*

$$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_k}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

é igual ao produto de números binomiais

$$\binom{n_1+\ldots+n_k}{n_1}\binom{n_2+\ldots+n_k}{n_2}\ldots\binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}}\binom{n_k}{n_k}$$

Solução 1. Podemos simplesmente escrever o valor de cada número binomial e cancelar os fatores repetidos. Mais precisamente, fazendo $s_i = n_i+n_{i+1}+\ldots+n_k$, temos que o produto em questão é igual a

$$\binom{s_1}{n_1}\binom{s_2}{n_2}\ldots\binom{s_{k-1}}{n_{k-1}}\binom{s_k}{n_k},$$

que por sua vez é igual a

$$\frac{s_1!}{n_1!\,\cancel{(s_1-n_1)!}}\cdot\frac{\cancel{s_2!}}{n_2!\,\cancel{(s_2-n_2)!}}\cdot\cancel{\ldots}$$
$$\cancel{\ldots}\cdot\frac{\cancel{s_{k-1}!}}{n_{k-1}!\,\cancel{(s_{k-1}-n_{k-1})!}}\cdot\frac{\cancel{s_k!}}{n_k!}.$$

Os termos se cancelam, um vez que $s_i - n_i = s_{i+1}$, para $1\leq i\leq k-1$. Portanto, o resultado do produto é:

$$\frac{s_1}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!} = \binom{n_1+n_2+\ldots+n_k}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

□

Solução 2. Podemos provar essa igualdade usando um simples argumento de contagem.

Para tanto, seja s_i definido como na solução anterior, e lembre-se de que, por um lado, o número multinomial

$$\binom{n_1+n_2+\ldots+n_k}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

também representa o número de anagramas de uma palavra com s_1 letras, sendo n_i delas iguais a x_i, para cada inteiro i de 1 a k.

Por outro lado, podemos contar essa quantidade de anagramas escolhendo, inicialmente, quais n_1 posições, dentre as s_1 possíveis, serão ocupadas por letras x_1. Conforme sabemos, isso pode ser feito de $\binom{s_1}{n_1}$ modos. Feito isso, escolhemos quais n_2 posições, dentre as $s_1 - n_1 = s_2$ que restaram, serão ocupadas por letras x_2. Isso pode ser feito de $\binom{s_2}{n_2}$ maneiras. Sobram, então, $s_2 - n_2 = s_3$ posições, detre as quais devemos escolher as que serão ocupadas por letras x_3, e assim por diante. Por fim, teremos $s_k = n_k$ posições sobrando, as quais serão todas escolhidas para serem ocupadas pelas letras x_k.

Pelo princípio fundamental da contagem, o número de maneiras de realizar todas essas escolhas é precisamente

$$\binom{s_1}{n_1}\binom{s_2}{n_2}\dots\binom{s_{k-1}}{n_{k-1}}\binom{s_k}{n_k}.$$

□

Terminamos esta seção com uma consequência simples, mas importante, da fórmula do desenvolvimento multinomial.

Teorema 6. *Fixados inteiros positivos n e k, se somarmos os valores de $\binom{n}{n_1,\dots,n_k}$ sobre todas as k-tuplas ordenadas $(n_1,\dots,n_k)$ de inteiros não negativos $n_1,\ \dots,\ n_k$ tais que $n_1+\dots+n_k = n$, o resultado obtido é igual a k^n. Em símbolos,*

$$\sum_{n_1+\dots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\dots,n_k} = k^n.$$

Prova. Fazendo $x_1 = \dots = x_k = 1$, obtemos

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = (\underbrace{1+1+\dots+1}_{k})^n = k^n$$

e

$$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k} = 1^{n_1}\cdot 1^{n_2}\cdot\ldots\cdot 1^{n_k} = 1.$$

A fórmula do enunciado segue, agora, imediatamente a partir da fórmula do desenvolvimento multinomial. □

2 Mais exemplos

Esta segunda seção coleciona alguns exemplos interessantes, os quais ilustram as aplicações das ideias discutidas na seção anterior.

Exemplo 7. *Qual o coeficiente de x^7 no desenvolvimento de $(1+3x+x^2)^4$?*

Solução. Sejam $x_1 = 1$, $x_2 = 3x$ e $x_3 = x^2$. Estamos considerando a expansão de $(x_1+x_2+x_3)^4$. Pelo Teorema Multinomial, tal expansão é a soma de termos da forma

$$\begin{aligned}\binom{4}{a,b,c}x_1^ax_2^bx_3^c &= \binom{4}{a,b,c}1^a(3x)^b(x^2)^c\\ &= \binom{4}{a,b,c}3^bx^{b+2c},\end{aligned}$$

onde $a+b+c=4$.

Para calcularmos o coeficiente de x^7, devemos primeiro calcular para que valores (inteiros não negativos) de a, b, c o expoente de x no termo acima será igual a 7. É claro que isso vale se e só $b+2c=7$. Mas, como $b+c \le 4$, é fácil ver que a única possibilidade é $b=1$ e $c=3$. Nesse caso, $(a,b,c)=(0,1,3)$ e, para esses valores, o coeficiente de x^7 é igual a:

$$\binom{4}{0,1,3}3^1 = \frac{4!}{3!}\cdot 3 = 12.$$

□

Exemplo 8. *Qual o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1+3x-2x^2)^{10}$?*

Solução. Pela mesma argumentação do exemplo anterior, cada termo desse desenvolvimento é da forma $1^a(3x)^b(-2x^2)^c = 3^b(-2)^cx^{b+2c}$, onde a, b e c são inteiros não negativos tais que $a+b+c=10$. Como queremos o coeficiente de x^4, devemos ter novamente $b+2c=4$. Nesse caso, porém, temos três possibilidades para (a,b,c), que organizamos na tabela a seguir; elas podem ser obtidas analisando os possíveis valores para c, de onde se encontra b e, em seguida, a e os demais valores da tabela:

(1) a	$(3x)$ b	$(-2x^2)$ c	$\binom{10}{a,b,c}\cdot 1^a(3x)^b(-2x^2)^c$		
8	0	2	$45 \cdot 4x^4$	$=$	$180x^4$
7	2	1	$360 \cdot (-18)x^4$	$=$	$-6.480x^4$
6	4	0	$210 \cdot 81x^4$	$=$	$17.010x^4$

Os três termos acima fazem parte de desenvolvimento de $(1+3x-2x^2)^{10}$. Portanto, o coeficiente de x^4 após a redução dos termos semelhantes é obtido somando os três coeficientes de tais termos. Assim, o coeficiente desejado é igual a $180 - 6.480 + 17.010 = 10.710$. □

O próximo exemplo é semelhante, mas nos ajudará a resolver também um outro problema adiante.

Exemplo 9. *Qual o coeficiente de x^6 na expansão de $(1+x+x^3+x^5)^{21}$?*

Solução. Dessa vez, o termo geral do desenvolvimento é da forma:

$$\binom{21}{a,b,c,d}1^a x^b (x^3)^c (x^5)^d = \binom{21}{a,b,c,d} x^{b+3c+5c}.$$

Queremos então que:

$$\begin{cases} a+b+c+d = 21 \\ b+3c+5d = 6 \end{cases}. \qquad (2)$$

Organizamos os possíveis valores para (a, b, c, d) na tabela abaixo, onde calculamos também o valor do termo obtido a partir de cada upla (a, b, c, d):

1	x	x^3	x^5	$\binom{21}{a,b,c,d} \cdot x^{b+3c+5c}$
a	b	c	d	
19	1	0	1	$420 \cdot x^6$
19	0	2	0	$210 \cdot x^6$
17	3	1	0	$23.940 \cdot x^6$
15	6	0	0	$54.264 \cdot x^6$

Logo, o coeficiente de x^6 na expansão pedida é igual a $420 + 210 + 23.940 + 54.264 = 78.834$. □

O exemplo seguinte mostra uma relação entre o cálculo dos coeficientes dos termos de um desenvolvimento multinomial com um problema de contagem.

Exemplo 10 (Olimp. Paulista de Matemática, adaptado). *Em* Terra Brasilis *ocorre um importante campeonato de futebol envolvendo 22 clubes. Cada equipe enfrenta uma vez cada uma das demais, recebendo: 5 pontos por cada goleada, ou seja, por cada vitória com diferença superior a dois gols; 3 pontos por cada vitória simples, ou seja, quando esta for por diferença de um ou dois gols; 1 ponto por cada empate; e 0 pontos por cada derrota.*

(a) Mostre que o número de maneiras distintas de, ao final do campeonato, uma equipe totalizar t pontos é igual ao coeficiente de x^t no desenvolvimento de $(1 + x + x^3 + x^5)^{21}$.

(b) De quantas maneiras uma equipe pode obter 6 pontos?

(c) De quantas maneiras distintas uma equipe pode pontuar em seus 21 jogos?

Observação: obter 1 ponto na primeira partida e 5 na segunda e obter 5 pontos na primeira partida e 1 na segunda são maneiras distintas de se pontuar nas duas primeiras partidas.

Solução.
(a) Veja que a equipe irá jogar 21 vezes. Denotando por a, b, c e d, as quantidades de jogos em que ela ganhou $0, 1, 3$, e 5 pontos, respectivamente, e sabendo que a equipe fez t pontos, temos que a, b, c e d satisfazem o seguinte sistema (compare-o com a Equação (2)):

$$\begin{cases} a+b+c+d = 21 \\ b+3c+5d = t \end{cases}. \qquad (3)$$

Fixada uma solução (a, b, c, d) do sistema acima, o número de maneiras em que a equipe pode jogar os 21 jogos, ganhando por goleada a vezes, por vitória simples b vezes, empatando c vezes, e perdendo d vezes, é dado pelo número de permutações com elementos repetidos

$$P_{21}^{a,b,c,d} = \frac{21!}{a!\, b!\, c!\, d!} = \binom{21}{a,b,c,d}.$$

De fato, o resultado dos jogos pode ser representado por uma sequência das letras G (goleada), V (vitória simples), E (empate) e D (derrota), onde temos um total de 21 letras e as quantidades de vezes nas quais usamos as letras G, V, E e D são, respectivamente, a, b, c, e d.

Por fim, o total de maneiras de obter t pontos é dado pela soma dos valores de $\binom{21}{a,b,c,d}$ para cada solução do sistema (3).

Por outro lado, seguindo a solução do Exemplo 9, cada termo do desenvolvimento de $(1 + x + x^3 + x^5)^{21}$ é, pelo Teorema Multinomial,

$$\binom{21}{a,b,c,d}1^a x^b (x^3)^c (x^5)^d = \binom{21}{a,b,c,d} x^{b+3c+5c}.$$

Ademais, os termos em que o expoente de x é igual a t são justamente aqueles em que (a, b, c, d) é uma solução do sistema (3).

Portanto, para obter o coeficiente de x^t devemos somar os coeficientes de todos os termos desse tipo. O resultado disso é exatamente a mesma soma que indica o número de maneiras em que a equipe pode obter t pontos.

(b) Essa questão foi respondida no Exemplo 9.

(c) Em cada um dos 21 jogos, há 4 resultados possíveis: goleada, vitória simples, empate e derrota. Sendo assim, pelo princípio fundamental da contagem, o número de maneiras em que a equipe pode pontuar é igual a 4^{21}.

É interessante observar que essa quantidade também pode ser obtida somando-se o número de maneiras em que a equipe pode totalizar t pontos, para cada valor de t.

Pelo item anterior, isso é igual à soma de todos os coeficientes do desenvolvimento de $(1 + x + x^3 + x^5)^{21}$. Essa soma pode ser obtida facilmente substituindo x por 1. O resultado é que a soma dos coeficientes é igual a $(1 + 1 + 1^3 + 1^5)^{21} = 4^{21}$, coincidindo com a resposta que havíamos calculado anteriormente. (Observe que, no final das contas, estamos utilizando aqui o resultado do Teorema 6.) □

No caso do problema anterior, a relação entre os coeficientes e a solução do problema de contagem, por interessante que seja, não chega a ser muito útil, uma vez que a dificuldade de encontrar aqueles coeficientes é a mesma daquela de resolver o problema de contagem diretamente. Mas, casos há casos em que essa relação pode realmente facilitar o nosso trabalho. Vejamos um exemplo disso agora.

Exemplo 11. *Num jogo, são usados dois dados em forma de tetraedro regular com faces numeradas* 1, 2, 3 *e* 4. *Ao se jogar cada dado, o valor obtido é aquele que está na face voltada para baixo. Pontos são ganhos somando-se os valores obtidos nos dois dados. Por defeito de fabricação, o jogo veio com um dado com faces numeradas* 1, 2, 2 *e* 3 *e o outro com faces* 1, 3, 3 *e* 5. *Ao receber o jogo para substituição, o dono da fábrica, que era matemático, argumentou que o jogo não mudaria mesmo utilizando os dados defeituosos, isto é, que o número de maneiras de se obter t pontos, para cada $2 \le t \le 8$, com os dados defeituosos e com os dados normais era o mesmo. Ele tinha razão? Explique.*

Solução. Observe que, no jogo original (i.e., com dados sem defeitos), o número de maneiras de se obter t pontos é igual ao coeficiente de x^t na expansão de $P(x) = (x+x^2+x^3+x^4)^2$. Por outro lado, no jogo defeituoso, tal número de maneiras é o coeficiente de x^t em $Q(x) = (x+x^2+x^2+x^3)(x+x^3+x^3+x^5)$. Mas, veja que

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x+2x^2+x^3)(x+2x^3+x^5) = \\ &= x^2(1+2x+x^2)(1+2x^2+x^4) \\ &= x^2(1+x)^2(1+x^2)^2 \\ &= x^2((1+x)(1+x^2))^2 \\ &= x^2(1+x+x^2+x^3)^2 \\ &= P(x) \end{aligned}$$

Logo, todos os coeficientes de $Q(x)$ são iguais aos de $P(x)$, de forma que os dois jogos são realmente equivalentes. $\square$

Recorde que a relação de Stifel (também conhecida como regra de Pascal) se escreve $\binom{n}{a} = \binom{n-1}{a-1} + \binom{n-1}{a}$. Denotando $n = a+b$, também podemos escrevê-la como

$$\binom{n}{a,b} = \binom{n-1}{a-1,b} + \binom{n-1}{a,b-1}.$$

O exemplo a seguir generaliza a relação de Stifel a números multinomiais. Por simplicidade, apresentamos tal generalização somente a números multinomiais da forma $\binom{n}{a,b,c}$.

Exemplo 12. *Dados inteiros positivos a, b e c, com $a+b+c = n$, vale a seguinte generalização da relação de Stifel:*

$$\binom{n}{a,b,c} = \binom{n-1}{a-1,b,c} + \binom{n-1}{a,b-1,c} + \binom{n-1}{a,b,c-1}.$$

Solução. Deixamos ao leitor a tarefa de dar uma demonstração *algébrica* da relação do enunciado, utilizando a fórmula $\binom{n}{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!}$. Apresentamos, pois, uma demonstração combinatória.

O número da esquerda, $\binom{n}{a,b,c}$, representa o número de anagramas da palavra

$$\underbrace{xx\dots x}_{a \text{ vezes}}\underbrace{yy\dots y}_{b \text{ vezes}}\underbrace{zz\dots z}_{c \text{ vezes}}.$$

Agora, uma vez definida a primeira letra de um anagrama, para contar a quantidade de anagramas que começam com tal letra basta contarmos a quantidade de anagramas do restante da palavra, com as devidas restrições sobre os números de vezes que devemos usar cada uma das letras$x$, y ou z. Portanto, $\binom{n-1}{a-1,b,c}$ representa a quantidade de tais anagramas que começam com a letra x, enquanto $\binom{n-1}{a,b-1,c}$ representa a quantidade de anagramas que começam com a letra y e $\binom{n-1}{a,b,c-1}$ a quantidade dos que começam com a letra z. Mas, como todo anagrama começa com x, y ou z, a soma do segundo membro da relação do enunciado também conta o total de anagramas.

Logo, o resultado desejado segue facilmente. $\square$

A equação e sua prova acima podem ser facilmente generalizadas para números multinomiais de maior ordem, onde $n = n_1 + \cdots + n_k$. A fórmula correspondente é a seguinte:

$$\begin{aligned} &\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\dots,n_k} + \binom{n-1}{n_1,n_2-1,\dots,n_k} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \binom{n-1}{n_1,n_2\dots,n_k-1} = \\ &= \binom{n}{n_1,\dots,n_k}. \end{aligned}$$

Dicas para o Professor

Este material é o último desta série sobre coeficientes binomiais e multinomiais. Como sempre, enfatizamos que é muito importante a resolução de uma grande quantidade de exercícios. Além da lista de exercícios propostos no próprio Portal da Matemática, o item [3] das referências abaixo está repleto de exemplos de somas mais avançadas envolvendo coeficiente binomiais e multinomiais. Por fim, observamos que os Exemplos 10 e 11 deste material podem servir de introdução para o estudo da teoria de Funções Geradoras. Contudo, o estudo mais aprofundado desse assunto requer técnicas não elementares, como diferenciação de séries infinitas, estudo de convoluções, etc.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*, 2ª edição. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.

3. R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik. *Matemática Concreta: Fundamentos para Ciência da Computação*. Editora LTC (1995).

4. J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. Murari. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.