Material Teórico - Módulo Função Afim

Resolução de Exercícios

Nono Ano

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

16 de maio de 2021

1 Exercícios variados

Neste material, discutimos alguns exercícios sobre funções afins.

Exemplo 1. *Davi adquiriu um plano de Internet numa operadora. O custo mensal desse plano consiste de um valor fixo, acrescido de um valor que é diretamente proporcional ao número de gigabytes (GB) utilizados no mês. Davi pagou* 43 *reais e* 78 *reais por este plano nos meses de abril e maio, tendo consumido* 5 *GB e* 12 *GB, respectivamente. Se Davi não deseja pagar mais que* 60 *reais na próxima fatura, a quantidade máxima em GB que ele pode consumir é:*

(a) 6.

(b) 7,5.

(c) 8,4.

(d) 9,2.

(e) 10.

Solução. Seja $f(x)$ o valor da fatura quando x GB são consumidos. O enunciado nos informa que $f(x) = ax + b$, em que b é o valor fixo e a é o preço de 1 GB.

Como $f(5) = 43$ e $f(12) = 78$, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} 5a + b = 43 \\ 12a + b = 78 \end{cases},$$

cuja solução é $a = 5$ e $b = 18$.

Tendo em vista que f é crescente, a quantidade máxima x_0 de GB que Davi pode consumir satisfaz $f(x_0) = 60$, ou seja, $5x_0 + 18 = 60$, o que nos dá $x_0 = 8{,}4$. Portanto, a alternativa correta é a letra **(c)**. □

Exemplo 2. *A e B são locadoras de automóvel. A cobra* 1 *real por km rodado, mais uma taxa fixa de* 100 *reais. B cobra* 80 *centavos por km rodado, mais uma taxa fixa de* 200 *reais. Discuta a vantagem de A sobre B ou de B sobre A, em função do número de quilômetros a serem rodados.*

Solução. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ os valores pagos nas locadoras A e B, respectivamente, quando x km forem rodados. Das hipóteses, concluímos que $f(x) = x + 100$ e $g(x) = 0{,}8 \cdot x + 200$.

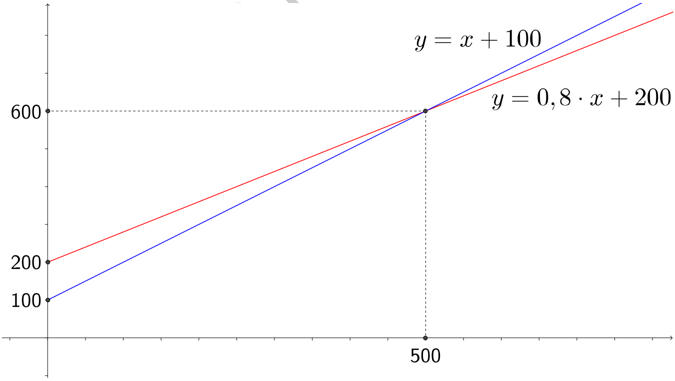
Como funções afins, os gráficos de f e g são retas, ou melhor, semirretas, uma vez que o domínio destas funções é o intervalo $[0, +\infty)$. Como $f(0) < g(0)$, o gráfico de f "começa por baixo" do gráfico de g; e este, por sua vez, é menos inclinado que aquele. Isso nos indica que o gráfico de f deve cruzar o gráfico de g num certo ponto (x_0, y_0), valendo $f(x) < g(x)$, se $0 \leq x < x_0$, e $f(x) > g(x)$, se $x > x_0$. Desse modo, x_0 resolverá o nosso problema.

Para obter x_0, note que esse valor é a solução da equação $f(x) = g(x)$, ou seja, é tal que

$$x_0 + 100 = 0{,}8 \cdot x_0 + 200.$$

Resolvendo a equação acima, obtemos $x_0 = 500$.

Assim, a situação é aquela descrita na figura abaixo, e a verificação das desigualdades $f(x) < g(x)$, se $0 \leq x < x_0$, e $f(x) > g(x)$, se $x > x_0$, torna-se imediata:



De outro modo, poderíamos ter notado que

$$f(x) - g(x) = 0{,}2 \cdot (x - 500),$$

donde se conclui que $f(x) - g(x)$ é menor que zero, zero ou maior que zero, conforme se tenha x menor que 500, igual a 500 ou maior que 500.

Concluindo, vemos que é mais vantajoso contratar a locadora A se o número de km a serem rodados for menor que 500; sendo maior, deve-se contratar a locadora B. Por fim, para percursos de exatos 500 km, o valor a ser pago é o mesmo em ambas as locadoras, a saber, $f(500) = g(500) = 600$ reais. $\square$

Exemplo 3. *Quando o percurso em uma corrida de táxi dobra, o custo da nova corrida é igual ao dobro, maior que o dobro ou menor que o dobro do custo da corrida original?*

Solução. O preço de uma corrida de táxi compõe-se de um valor de adesão, a *bandeirada*, adicionado a um valor de deslocamento; por sua vez, esse valor de deslocamento é diretamente proporcional à distância total percorrida. Se, em reais, b é o valor da bandeirada e a é o custo por km rodado, o preço de uma corrida de x km é $f(x) = ax + b$. O problema nos pede para comparar $f(2x)$ com $2f(x)$. Ora,

$$\begin{aligned} 2f(x) &= 2(ax + b) \\ &= 2ax + 2b \\ &= [a(2x) + b] + b \\ &= f(2x) + b. \end{aligned}$$

Como b é positivo, temos $2f(x) = f(2x) + b > f(2x)$, ou seja, o custo ao se dobrar o percurso é menor que o dobro do custo da corrida original. $\square$

Exemplo 4. *O horário que mais aproxima o instante em que os ponteiros do relógio formam um ângulo raso é:*

(a) $3h\ 45min.$

(b) $3h\ 46min.$

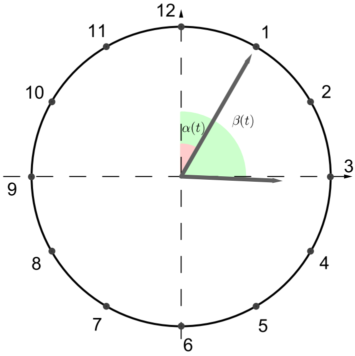
(c) $3h\ 47min.$

(d) $3h\ 48min.$

(*e*) $3h\ 49min.$

Solução. Pensando no relógio como um círculo centrado na origem, seja $\alpha(t)$ o ângulo (em graus) que vai do eixo das ordenadas até o ponteiro dos minutos, t minutos após as 3 h. Definimos $\beta(t)$ de forma análoga, relativamente ao ponteiro das horas.

Como intervalos de tempos iguais correspondem a variações angulares iguais para cada um dos ponteiros, concluímos (pois os ângulos crescem com o tempo) que α e β são funções afins, digamos $\alpha(t) = a + bt$, $\beta(t) = c + dt$. Aqui, t é o tempo transcorrido, em minutos, a partir de $t = 0$.



Das condições iniciais ($\alpha(0) = 0$ e $\beta(0) = 90$), obtemos $a = 0$ e $c = 90$. Por outro lado, uma vez que o ponteiro dos minutos dá uma volta completa a cada 60 minutos, concluímos que, por minuto, ele avança $360/60 = 6$ graus. Da mesma forma, a cada 60 minutos o ponteiro das horas avança $360/12 = 30$ graus, logo, por minuto ele avança $30/60 = 1/2$ grau. Assim, $\alpha(1) = 6$ e $\beta(1) = 0{,}5$, de forma que $b = 6$ e $d = 0{,}5$.

Queremos t_0 de modo que $\alpha(t_0) = \beta(t_0) + 180$, isto é,

$$6t_0 = (0{,}5t_0 + 90) + 180.$$

Resolvendo essa equação de primeiro grau, obtemos $t_0 = 540/11 \cong 49{,}1$. Portanto, a alternativa correta é a letra **(e)**. $\square$

Os próximos exemplos são mais desafiadores. Para alguns deles (em especial já para o próximo), convém lembrar do seguinte teorema de caracterização das funções afins (Teorema 7 da vídeo-aula "Noções Básicas" (sobre funções afins), nesse mesmo módulo):

Teorema 5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com taxa de variação constante, ou seja, tal que existe um número real a para o qual*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a,$$

quaisquer que sejam os números reais x e h, com $h \neq 0$. Então, f é uma função afim.

Exemplo 6. *Às 8h uma torneira de um reservatório de água foi acionada. Ao meio-dia, quando o volume de água caiu pela metade, uma segunda torneira foi aberta. Se a vazão das torneiras é constante, determine:*

(*i*) *A razão entre as vazões, sabendo que o reservatório secou às $13h30min$.*

(*ii*) *O gráfico do volume em função do tempo, sabendo que, inicialmente, havia $1000\ l$ de água no reservatório.*

Solução.

Para o item (i), sejam a_1 a vazão da primeira torneira e a_2 a vazão da segunda, ambas medidas em litros por hora. Sendo V_0 o volume de água no reservatório às 8h, o enunciado diz que a variação de volume nas próximas 4h é $\frac{V_0}{2}$. Portanto,

$$a_1 = \frac{\frac{V_0}{2}}{4} = \frac{V_0}{8}.$$

Por outro lado, de meio-dia à uma e meia da tarde, com as duas torneiras abertas, o volume restante, $\frac{V_0}{2}$, escoou completamente. Desta forma,

$$a_1 + a_2 = \frac{\frac{V_0}{2}}{1{,}5} = \frac{V_0}{3}$$

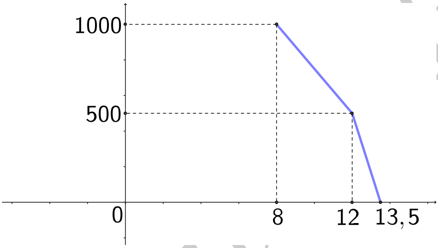
e, daí,

$$a_2 = \frac{V_0}{3} - a_1 = \frac{V_0}{3} - \frac{V_0}{8} = \frac{5V_0}{24}.$$

Assim,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{V_0}{8}}{\frac{5V_0}{24}} = \frac{3}{5}.$$

Quanto a (ii), seja $V : [8, 13{,}5] \to \mathbb{R}$ a função volume, em que $V(t)$ é o volume de água no reservatório, medido no instante t. Sobre os intervalos $[8, 12]$ e $[12, 13{,}5]$, sabemos que V possui taxa de variação constante (pois a vazão total de água é constante). Portanto, pelo teorema anterior, V deve ser uma função afim sobre cada um daqueles intervalos. Logo, o gráfico da função volume é a poligonal que conecta os pontos $(8, V(8)) = (8, 1000)$, $(12, V(12)) = (12, 500)$ e $(13{,}5, V(13{,}5)) = (13{,}5, 0)$. $\square$



Para o próximo exercício, necessitaremos do seguinte resultado, que pode ser facilmente demonstrado com o auxílio de um pouco de Geometria Euclidiana (veja, por exemplo, a referência [2]).

Proposição 7. *No plano cartesiano, seja M o ponto médio do segmento de extremos A e B. Então, as coordenadas de M são as médias aritméticas das respectivas coordenadas de A e B, ou seja, se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, tem-se $M = (\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$.*

Precisaremos, ainda, da seguinte versão mais geral do Teorema 5 (para uma demonstração, veja a referência [1]):

Teorema 8. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função crescente ou decrescente. Se a variação* $f(x+h) - f(x)$ *depender apenas de* h*, mas não de* x*, então* f *é uma função afim.*

Exemplo 9. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função crescente cumprindo com a seguinte condição: dados dois pontos quaisquer no gráfico de* f*, o ponto médio do segmento de reta que eles determinam ainda é um ponto do gráfico de* f*. Mostre que* f *é uma função afim.*

Solução. A Proposição 7 garante que o ponto médio M de um segmento de extremos $(x,f(x))$ e $(y,f(y))$, pontos do gráfico de f, deve ser $M = (\frac{x+y}{2}, \frac{f(x)+f(y)}{2})$. Por outro lado, a hipótese do problema nos garante que este ponto médio ainda é um ponto do gráfico de f; assim, a ordenada de M deve ser a imagem, por f, de sua abscissa, isto é,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Com essa relação e o Teorema 8 em mente, vamos mostrar que a variação $f(x+h) - f(x)$ não depende de x.

Inicialmente, segue de (1) que

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f\left(\frac{2x+2h}{2}\right) - f(x) \\ &= \frac{f(2x)+f(2h)}{2} - f(x) \\ &= \frac{f(2x) - 2f(x) + f(2h)}{2}. \end{aligned}$$

Agora, novamente por (1), tem-se

$$2f(x) = 2f\left(\frac{2x+0}{2}\right) = f(2x) + f(0),$$

logo,

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \frac{f(2x)-2f(x)+f(2h)}{2} \\ &= \frac{f(2x)-(f(2x)+f(0))+f(2h)}{2} \\ &= \frac{f(2h)-f(0)}{2}, \end{aligned}$$

o que mostra o desejado.

Por fim, sendo f uma função crescente, as hipóteses no Teorema 8 estão satisfeitas e, portanto, f é uma função afim. □

Na análise do item (b) do próximo exemplo, utilizaremos a *fórmula para a distância entre dois pontos do plano cartesiano*, que diz que se $A = (a,b)$ e $B = (c,d)$, então a distância de A a B mede

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

Sua demonstração é uma aplicação imediata do Teorema de Pitágoras, e pode ser encontrada na referência [2].

Exemplo 10. *Diz-se que um corpo está em* movimento retilíneo uniforme*, abreviadamente* MRU*, quando ele se desloca sobre uma reta, sempre no mesmo sentido, percorrendo distâncias iguais em intervalos de tempos iguais. A esse respeito, faça os seguintes itens:*

(*i*) *Supondo que um corpo em MRU se desloca sobre a reta numerada, seja $s(t)$ sua posição no instante t. Mostre que s é uma função afim de t. Escrevendo $s(t) = s_0 + vt$, dizemos que s_0 é a* posição inicial *e v é a* velocidade *do corpo.*

(*ii*) *Dois corpos deslocam-se, em MRU, sobre os eixos das abscissas e das ordenadas de um sistema cartesiano. Se há colisão entre os corpos, mostre que a distância $\delta(t)$ entre eles, em um instante t anterior ao instante de colisão, se escreve como $\delta(t) = |h(t)|$, sendo h uma função afim.*

Solução.

(i) Como o corpo se desloca sempre no mesmo sentido, $s(t)$ é uma função crescente (caso o corpo se desloque no sentido positivo da reta numerada) ou decrescente (se o sentido de percurso for contrário ao sentido positivo da reta numerada). Além disso, é dito que o corpo percorre distâncias iguais em intervalos de tempos iguais, ou seja, fixado h, a diferença $s(t+h) - s(t)$ (distância percorrida no intervalo de tempo h) é a mesma, independentemente do número real t. Portanto, o Teorema 8 garante que s é uma função afim de t.

(ii) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ as funções posição dos corpos que se deslocam ao longo dos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente. Como os movimentos são uniformes, f e g são funções afins de t, ou seja, existem constantes a,b,c e d tais que $f(t) = a + bt$ e $g(t) = c + dt$.

Se um dos corpos estiver em repouso, digamos o que se desloca ao longo do eixo das ordenadas, então $d = 0$. Portanto, para que haja colisão (que só pode ocorrer na origem), devemos ter $c = 0$, de sorte que $\delta(t) = |f(t)|$. Assim, basta tomar $h = f$.

Suponhamos, portanto, que as velocidades b e d são ambas não-nulas. Da fórmula da distância entre dois pontos, temos

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \sqrt{[(a+bt)-0]^2 + [0-(c+dt)]^2}\\ &= \sqrt{(a+bt)^2 + (c+dt)^2}\\ &= \sqrt{(b^2+d^2)t^2 + 2(ab+cd)t + a^2 + c^2}.\end{aligned}$$

Como os corpos colidem, existe um instante t_0 tal que $f(t_0) = 0 = g(t_0)$ (novamente, os corpos só podem colidir na origem). Portanto,

$$\frac{a}{b} = -t_0 = \frac{c}{d},$$

logo,

$$a = \frac{bc}{d}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\delta(t)^2 &= (b^2+d^2)t^2 + 2(ab+cd)t + a^2 + c^2 \\
&= (b^2+d^2)t^2 + 2\left(\frac{b^2c}{d} + cd\right)t + \frac{b^2c^2}{d^2} + c^2 \\
&= (b^2+d^2)t^2 + 2\left(\frac{b^2c+cd^2}{d}\right)t + \frac{b^2c^2+c^2d^2}{d^2} \\
&= (b^2+d^2)t^2 + 2\left[(b^2+d^2)\frac{c}{d}\right]t + (b^2+d^2)\frac{c^2}{d^2} \\
&= (b^2+d^2)\left[t^2 + 2\frac{c}{d}t + \left(\frac{c}{d}\right)^2\right] \\
&= (b^2+d^2)\left(t+\frac{c}{d}\right)^2.
\end{aligned}$$

Concluímos que $\delta(t) = |\sqrt{b^2+d^2}(t+\frac{c}{d})|$. Assim, definindo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(t) = \sqrt{b^2+d^2}(t+\frac{c}{d})$, temos que h é uma função afim e $\delta(t) = |h(t)|$, para todo t. □

Para o próximo e último exemplo, dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma *progressão aritmética* (abreviamos *PA*) se existir uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$a_n = f(n),\ \forall\, n \geq 1.$$

Nesse caso, escrevendo $f(x) = rx + s$, com $r, s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
a_n &= f(n) = rn + s \\
&= r(n-1) + (r+s) \\
&= r(n-1) + a_1.
\end{aligned}$$

Nas notações acima, é costume dizer que a expressão

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

é o *termo geral* da PA $(a_n)_{n\geq 1}$ e que o real r é sua *razão*. Em particular, para $p, q \in \mathbb{N}$, note que

$$a_q - a_p = (q-p)r. \tag{2}$$

Exemplo 11. *Se* 42*,* 97 *e* 174 *são termos de uma PA de razão positiva, mostre que* 130 *também o é.*

Solução. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma PA de razão r, tal que $a_m = 42$, $a_k = 97$ e $a_l = 174$, para certos inteiros positivos m, k e l.

Note que r é um número racional, uma vez que, graças a (2),

$$55 = a_k - a_m = (k-m)r \Rightarrow r = \frac{55}{k-m} \in \mathbb{Q}.$$

Da mesma forma, para uso futuro, note que

$$77 = a_l - a_k = (l-k)r.$$

Escrevendo $r = \frac{c}{d}$, em que $c{,}d \in \mathbb{N}$ primos entre si, segue de $(k-m)r = 55$ e $(l-k)r = 77$ que

$$55d = (k-m)c \quad \text{e} \quad 77d = (l-k)c.$$

Portanto, c é um divisor comum de $55d$ e $77d$ ou, com maior razão, c é um divisor comum de 55 e 77, já que c e d não compartilham fator primo algum. Logo, c divide 11 e, assim, $c = 1$ ou $c = 11$.

Utilizando (2) mais uma vez, obtemos

$$a_n - 97 = a_n - a_k = (n-k)r,$$

para cada natural n. Queremos garantir a existência de um natural n tal que $a_n = 130$. Ora, graças à última relação acima,

$$\begin{aligned} a_n = 130 &\Leftrightarrow 130 - 97 = (n-k)r \\ &\Leftrightarrow n = k + \frac{33}{r} = k + \frac{33d}{c}. \end{aligned}$$

Assim, basta tomar

$$n = \begin{cases} k + 33d, \text{ se } c = 1 \\ k + 3d, \text{ se } c = 11 \end{cases}.$$

□

Dicas para o Professor

Antes de iniciar as soluções, pode ser útil fazer uma revisão do conteúdo, destacando-se as principais ideias envolvidas nos argumentos. Em seguida, é fortemente recomendável que o professor incentive os alunos a produzirem as suas próprias soluções, indicando, se necessário, uma estratégia argumentativa. Finalmente, sugerimos que as resoluções sejam apresentadas em detalhes e problemas correlatos sejam discutidos com a turma. Dessa forma, três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo deste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 1.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.