Material Teórico - Módulo Progressões Aritméticas

Exercícios de Fixação

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios de Fixação

Colecionamos neste material alguns exemplos mais elaborados, a fim de exercitar o material sobre PAs abordado nas aulas anteriores.

Exemplo 1. *Os números naturais são dispostos em tabelas* 3×3*, do seguinte modo:*

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

19		

$\cdots$

Por exemplo, o número 15 *está na segunda linha e na terceira coluna da segunda tabela. Calcule a linha, a coluna e a tabela em que se encontra o número* 800*.*

Solução. Observe que a sequência cujo $n-$ésimo termo é o elemento que está na primeira linha e na primeira coluna da tabela de número n é uma PA de razão 9. Portanto, dividindo 800 por 9 podemos obter a linha em que esse número se encontra. De fato, temos

$$800 = 88 \cdot 9 + 8,$$

o que significa que o número 800 pertence à 89ª tabela.

Agora, dividimos o resto 8 por 3, pois cada tabela possui 3 colunas, para obtermos a linha e a coluna, da 89ª tabela, às quais o número 800 pertence. Como $8 = 2 \cdot 3 + 2$, segue que o número 800 pertence à 3ª linha e 2ª coluna da 89ª tabela. Apresentamos, abaixo, a 89ª tabela: $\square$

793	794	795
796	797	798
799	800	801

Exemplo 2. *Encontre todos os termos comuns das PAs* $(2, 15, 28, 41, \ldots)$ *e* $(7, 12, 17, 22, \ldots)$*.*

Solução. Denotamos por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ as PAs $(2, 15, 28, 41, \ldots)$ e $(7, 12, 17, 22, \ldots)$, respectivamente. Como a_n tem razão 13 e b_m tem razão 5, utilizando a fórmula do termo geral, obtemos:

$$a_n = 2 + 13(n-1)$$

e

$$b_m = 7 + 5(m-1).$$

Agora, fazemos $a_n = b_m$ com o objetivo de encontrar condições sobre m e n para que ocorram termos comuns. Assim, temos:

$$\begin{aligned} a_n = b_m &\iff 2 + 13(n-1) = 7 + 5(m-1) \\ &\iff 5m = 13(n-1) \\ &\implies 13 \mid 5m \\ &\implies 13 \mid m. \end{aligned}$$

Desse modo, se um natural x pertence às duas PAs, então $x = b_{13k}$, para algum inteiro $k \geq 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} x &= b_{13k} \\ &= 7 + 5(13k - 1) \\ &= 65k + 2. \end{aligned}$$

Reciprocamente, é fácil ver que, para qualquer $k \geq 1$, o número $65k + 2$ pertence às duas PAs. De fato, já vimos que $65k + 2 = b_{13k}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} 65k + 2 &= 2 + 13 \cdot 5k \\ &= 2 + 13\left((5k+1) - 1\right) \\ &= a_{5k+1} \end{aligned}$$

Portanto, os termos comuns das duas PAs também formam uma PA, que possui primeiro termo igual a 67 e razão igual a 65:

$$(67, 132, 197, \ldots).$$

$\square$

Exemplo 3. *Uma soma finita de (pelo menos dois) inteiros ímpares e consecutivos é igual a* 7^3*. Encontre esses números.*

Solução. Uma lista finita de números ímpares e consecutivos é dada por uma PA $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ cuja razão vale 2. Portanto, fazendo $r = 2$ na fórmula alternativa para a soma dos termos de uma PA discutida anteriormente (cf. equação (2) do material referente à aula anterior), obtemos:

$$\begin{aligned} 7^3 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= na_1 + \frac{\cancel{2}n(n-1)}{\cancel{2}} \\ &= n(a_1 + n - 1). \end{aligned}$$

Como $7^3 = n(a_1 + n - 1)$, temos que $n \mid 7^3$, de forma que $n = 7$, $n = 7^2$ ou $n = 7^3$. Analisemos cada uma dessas possibilidades separadamente:

(i) Fazendo $n = 7$, obtemos:

$$\begin{aligned} 7^3 = 7(a_1 + 6) &\implies a_1 + 6 = 7^2 = 49 \\ &\implies a_1 = 43. \end{aligned}$$

Logo, neste caso, a lista procurada é

$$(43, 45, 47, 49, 51, 53, 55).$$

(ii) Agora, se $n = 49$, obtemos

$$\begin{aligned} 7^3 = 7^2(a_1 + 7^2 - 1) &\Longrightarrow a_1 + 48 = 7 \\ &\Longrightarrow a_1 = -41. \end{aligned}$$

Neste caso, a fórmula do termo geral nos dá

$$a_{49} = -41 + (49 - 1) \cdot 2 = 55,$$

de sorte que a lista dos números procurados é

$$(-41, -39, -37, \ldots, 53, 55).$$

(iii) Finalmente, se $n = 7^3$, teríamos

$$\begin{aligned} 7^3 = 7^3(a_1 + 7^3 - 1) &\Longrightarrow a_1 + 342 = 1 \\ &\Longrightarrow a_1 = -341. \end{aligned}$$

Como $7^3 = 343$, invocando novamente a fórmula do termo geral, obtemos

$$a_{343} = -341 + (343 - 1) \cdot 2 = 343.$$

Portanto, a lista dos números procurados é

$$(-341, -339, \ldots, 339, 341, 343).$$

□

Exemplo 4 (Banco OBMEP). *Considere a tabela de números a seguir. A primeira linha traz os números de* 1 *até* n. *A segunda traz os números de* 1 *até* n, *cada um multiplicado por* 2. *As linhas seguem esse padrão até a última, a qual apresenta os números de* 1 *até* n, *todos multiplicados por* n.

1	2	3	$\cdots$	n
2	4	6	$\cdots$	$2n$
3	6	9	$\cdots$	$3n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$2n$	$3n$	$\cdots$	n^2

(a) Calcule a soma de todos os números da linha de número k. *Com isto, obtenha uma expressão para a soma de todos os números da tabela.*

(b) Observe os pedaços destacados na tabela, todos em forma de L. Os números do $k-$*ésimo L são:*

$$k, 2k, \ldots, (k-1)k, k^2, (k-1)k, \ldots, 2k, k.$$

Calcule a soma dos mesmos em função de k.

(c) Somando os resultados de todos os números em formato de L, chegaremos ao mesmo resultado que somando os números em todas as linhas. Utilize este fato para calcular o valor da expressão:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3.$$

Solução.
(a) Observe que os números na linha k são os números de 1 até n multiplicados por k. Portanto, a sua soma é:

$$\begin{aligned} k + 2k + 3k + \cdots + nk &= k(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= k \cdot \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Agora, podemos calcular a soma dos números de todas as linhas pondo o fator comum $\frac{n(n+1)}{2}$ em evidência. Assim fazendo, obtemos:

$$\frac{n(n+1)}{2} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \cdots + n \cdot \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

(b) Observando a simetria das parcelas que compõem a primeira linha a seguir, temos:

$$k + 2k + \cdots + (k-1)k + k^2 + (k-1)k + \cdots + 2k + k =$$

$$\begin{aligned} &= k^2 + 2k + 4k + \cdots + 2(k-1)k \\ &= k^2 + 2k\,(1 + 2 + \cdots + (k-1)) \\ &= k^2 + \cancel{2}k \cdot \frac{k(k-1)}{\cancel{2}} \\ &= k^2 + k^2(k-1) = k^3. \end{aligned}$$

(c) Construindo a tabela para $n = 100$, teremos 100 linhas e 100 pedaços em forma de L. Uma vez que a soma de todos os números da tabela pode ser obtida somando-se os resultados das somas dos números de cada uma das 100 camadas, concluímos a partir dos itens anteriores que

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3 &= \left(\frac{100 \cdot 101}{2}\right)^2 \\ &= 5.050^2 \\ &= 25.502.500. \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50 minutos para desenvolver os exemplos contidos nesse material. Na primeira metade da sessão, sugerimos que o professor estimule os alunos a pensarem nos problemas propostos, possivelmente dando dicas à medida que perceber suas dificuldades. As referências [1] e [2] contém vários outros problemas propostos de calibre igual ou superior aos colecionados aqui.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume* 1*: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G. Iezzi, S. Hazzan. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 4*: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas.* São Paulo, Atual Editora, 2012.