Material Teórico - Módulo de Frações, O Primeiro Contato

Frações e Potenciação - Parte I

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Ulisses Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha

23 de janeiro de 2026

Portal da Matemática
OBMEP

Continuando o estudo das operações aritméticas com frações, discutimos neste material as potências de frações, sempre a partir de situações-problema.

1 Potências de frações

A ideia de potência, que já conhecemos para os números naturais, aparece quando repetimos o mesmo fator várias vezes em uma multiplicação. Por exemplo, 2^3 significa $2 \cdot 2 \cdot 2$, com o *expoente* 3 indicando que o fator 2 deve ser repetido três vezes.

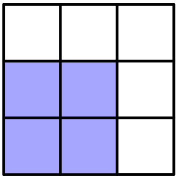
De modo análogo, chamaremos de *potência de uma fração* todo produto em que a mesma fração apareça várias vezes. Por exemplo,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}.$$

Comecemos com um exemplo em que a potência surge de forma natural.

Exemplo 1. *Um quadrado de cartolina tem lado de* 1 *metro. Uma nova cartolina é produzida reduzindo* cada *lado para* $\frac{2}{3}$ *do original. Qual fração da* área *do quadrado original terá o novo quadrado?*

Solução. Representemos o quadrado original por um quadrado dividido em $3 \times 3 = 9$ quadradinhos iguais. Reduzir o lado para $\frac{2}{3}$ significa tomar 2 das 3 partes em cada direção. Assim, a área do novo quadrado corresponde a um bloco 2×2, isto é, a 4 quadradinhos, dentre os 9 do total:



Logo, a fração da área do quadrado novo em relação ao antigo é $\frac{4}{9}$.

Note que podemos calcular a área do novo quadrado calculando o quadrado da medida do seu lado. Como a medida do lado do novo quadrado corresponde a $\frac{2}{3}$ da medida do lado do quadrado original, temos a igualdade

$$\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

$\square$

O exemplo anterior sugere uma regra simples: se multiplicarmos uma fração $\frac{a}{b}$ por ela mesma n vezes, então

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ fatores}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

> **Potências de frações:** para n natural, *elevar* $\frac{a}{b}$ *à potência* n significa multiplicar a fração $\frac{a}{b}$ por ela mesma n vezes, e o resultado é
>
> $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Nos próximos exemplos, a potência surge por *repetição de uma mesma ação.*

Exemplo 2. *Joana recebeu uma quantia em dinheiro. Ao final de cada dia, ela guardava exatamente $\frac{3}{5}$ do dinheiro que tinha naquele momento (e gastava o resto). Após três dias, que fração da quantia inicial ela terá guardado?*

Solução. No fim do primeiro dia, Joana guardou $\frac{3}{5}$ do que tinha no início. No final do segundo dia, ela guardou $\frac{3}{5}$ do que restou; portanto, restaram agora

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

da quantia inicial. No fim do terceiro dia, ela repetiu a mesma ação mais uma vez, guardando

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

da quantia inicial.

Utilizando a regra $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, obtemos

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}.$$

Logo, após 3 dias, Joana terá guardado $\frac{27}{125}$ da quantia inicial. $\square$

Exemplo 3. *Uma camiseta custava* R\$ 150,00*. Em uma promoção, a loja aplicou* o mesmo desconto *de* $\frac{1}{10}$ *do preço* três vezes seguidas*. Qual foi o preço final da camiseta?*

(*a*) R\$ 121,50.

(*b*) R\$ 109,35.

(*c*) R\$ 105,00.

(*d*) R\$ 135,00.

(*e*) R\$ 90,00.

Solução. A cada vez que aplicarmos um desconto de $\frac{1}{10}$ do preço, o preço da camiseta passa a ser $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ do preço anterior; de outra forma, o preço antes da aplicação do desconto deve ser multiplicado por $\frac{9}{10}$ para se obter o preço após a aplicação do desconto.

Assim, após três sucessivas aplicações de um desconto de $\frac{1}{10}$ do preço, o novo preço será

$$\left(\frac{9}{10}\right)^3$$

do preço original. Como o preço original era R$ 150,00, após as três etapas, o preço será

$$150 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3.$$

Calculando a potência, obtemos

$$\left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{9^3}{10^3} = \frac{729}{1000}.$$

Logo, o preço final será

$$150 \cdot \frac{729}{1000} = \frac{150}{1000} \cdot 729 = \frac{3}{20} \cdot 729 = \frac{2187}{20} = 109{,}35.$$

Portanto, o preço final será R$ 109,35, e a alternativa correta é a letra (b). □

Exemplo 4. *Um laboratório prepara uma solução a partir de um concentrado. A cada etapa, ele utiliza $\frac{1}{4}$ do concentrado que ainda resta no frasco. Se o frasco tinha inicialmente 1 litro de concentrado, quantos litros de concentrado restarão após 4 etapas?*

Solução. Em cada etapa, é usado $\frac{1}{4}$ do que ainda há no frasco, de modo que restam $\frac{3}{4}$ do total de concentrado após a realização da etapa anterior.

Assim, após 4 etapas, restarão

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

do volume inicial. Fazendo os cálculos, obtemos

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}.$$

Logo, restarão $\frac{81}{256}$ litro de concentrado. □

Exemplo 5 (CMS - adaptado). *Uma pequena bolinha, ao ser lançada para cima até certa altura máxima H, toca uma superfície plana e, ao quicar, sobe a uma altura máxima igual a $\frac{4}{5}$ da altura máxima anterior. Assim, a primeira vez em que bolinha atingirá uma altura máxima menor do que a metade da altura H será após o*

(a) 2° *toque no chão.*

(b) 3° *toque no chão.*

(c) 4° *toque no chão.*

(d) 5° *toque no chão.*

(e) 6° *toque no chão.*

Solução. Observe que H denota a altura máxima atingida pela bolinha antes do primeiro toque no chão.

Após o 1° toque no chão, a bolinha sobe até

$$H_1 = \frac{4}{5}H.$$

Após o 2° toque no chão, ela sobe até

$$H_2 = \frac{4}{5} \cdot H_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}H = \left(\frac{4}{5}\right)^2 H.$$

Iterando o raciocínio acima, percebemos que, de modo geral, após o n-ésimo toque no chão, a altura máxima atingida será

$$H_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n H.$$

Queremos encontrar o menor n tal que $H_n < \frac{H}{2}$, isto é, tal que

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n H < \frac{H}{2}.$$

Como $H > 0$, podemos dividir os dois lados por H para concluir que queremos encontrar o menor natural n tal que

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1}{2}.$$

Testemos as sucessivas potências de $\frac{4}{5}$:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4}{5} = 0{,}8 > \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = 0{,}64 > \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} = 0{,}512 > \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625} = 0{,}4096 < \frac{1}{2}.$$

Logo, a bolinha atinge *menos da metade* da altura máxima H pela primeira vez logo após o 4° toque no chão. Dessa forma, a alternativa correta é (c). □

Exemplo 6. *Inicialmente, um tanque contém uma certa quantidade de água. Ao final de cada dia, retira-se exatamente* $\frac{1}{4}$ *da água presente no tanque e nenhuma outra água é adicionada.*

(a) *Que fração da quantidade inicial de água permanece no tanque após um dia? E após dois dias?*

(b) *Que fração da quantidade inicial de água permanece no tanque após n dias?*

(c) *Após quantos dias, no mínimo, a quantidade de água no tanque será menor do que a quarta parte da quantidade inicial?*

Solução. De modo análogo ao que fizemos nos exemplos anteriores, após n dias, o volume de água no tanque será

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

do volume inicial. Assim, após um dia, o volume de água é igual a

$$\frac{3}{4} \text{ do volume inicial}$$

e, após dois dias, é igual a

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ do volume inicial.}$$

Isso responde aos itens (a) e (b).

Para o item (c), queremos o menor número n de dias tal que

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{4}.$$

Calculando potências sucessivas de $\frac{3}{4}$, obtemos

$$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} > \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} > \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} > \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} > \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024} < \frac{1}{4}.$$

Logo, após 5 dias, a quantidade de água no tanque passa a ser menor do que a quarta parte da quantidade inicial.

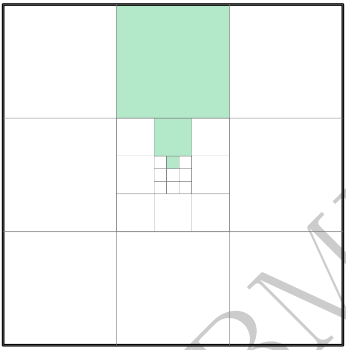
□

Exemplo 7. *Um artista plástico está criando uma tela chamada “Infinito em Quadros”. Ele começa com um quadrado branco de lado* 1 *metro.*

- *No primeiro dia, ele divide a tela em* 9 *quadradinhos iguais e pinta um deles de verde.*
- *No segundo dia, ele escolhe um dos quadradinhos brancos restantes, divide-o em* 9 *quadradinhos menores e pinta apenas um desses* 9 *novos quadradinhos de verde.*

- *Ele repete esse processo da mesma forma até completar o 5° dia de trabalho.*

Na figura abaixo, podemos ver a tela depois do terceiro dia de trabalho. Qual é a área total pintada de verde ao final do quinto dia?



Solução. A área do quadrado original é $1^2 = 1$. Vamos calcular a área que o artista adiciona a cada dia:

- No 1° dia, a área pintada é $\frac{1}{9}$ do total.
- No 2° dia, ele pinta $\frac{1}{9}$ de um dos quadrados menores. Assim, a área pintada neste dia é $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{9}\right)^2$.
- No 3° dia, a nova área pintada é $\left(\frac{1}{9}\right)^3$.

Como o processo se repete por 5 dias, a área total pintada será a soma das áreas pintadas nesses 5 dias, que é dada pela soma

$$A = \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \left(\frac{1}{9}\right)^4 + \left(\frac{1}{9}\right)^5$$

Usando a regra $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, calculamos as potências:

$$A = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{59049}.$$

Para somar, utilizamos o denominador comum 59049:

$$A = \frac{6561 + 729 + 81 + 9 + 1}{59049} = \frac{7381}{59049}.$$

Portanto, ao final do quinto dia, a área total pintada de verde será $\frac{7381}{59049}$ metro quadrado. $\square$

Observação 8. Diferentemente de problemas nos quais calculamos quanto "sobra" de uma quantidade que diminui (como nos exemplos anteriores), aqui estamos *adicionando* novas áreas a cada passo. Cada termo da soma é uma potência de $\frac{1}{9}$ que representa o tamanho de uma peça nova. Embora o número de quadrados pintados aumente, o valor de cada nova potência diminui tão rapidamente que a área total pintada ainda é uma fração pequena da tela original.

Observação 9. Nos exemplos acima, ficou claro que as potências de frações ajudam a organizar cálculos quando comparamos *várias repetições* de um mesmo processo. Em situações como "a cada passo resta $\frac{p}{q}$ do que havia antes", a fração após n passos é $\left(\frac{p}{q}\right)^n$ do valor inicial.

Sugestões para o Professor

Optamos por uma abordagem a partir da resolução de problemas para que os alunos identifiquem situações em que a potência aparece naturalmente: mudanças de escala (como em áreas), repetições de uma mesma ação (guardar uma fração, aplicar o mesmo desconto, usar sempre a mesma parte de uma quantidade que vai diminuindo, etc.).

Recomendamos que o professor comece com expoentes pequenos (2 e 3, por exemplo), incentivando o aluno a escrever a potência como um produto (por exemplo, $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$) antes de usar 3^3 e 5^3. Isso reduz erros de procedimento e reforça o significado da potência como produto de fatores repetidos.

Dois encontros de 50 minutos devem ser suficientes para cobrir o conteúdo deste material, com tempo para que a turma resolva problemas adicionais propostos pelo professor.