Material Teórico - Módulo Áreas de Figuras Planas

Áreas de Figuras Planas: Resultados Básicos - Parte 1

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

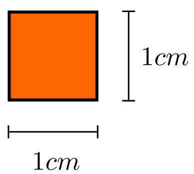
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

3 de setembro de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

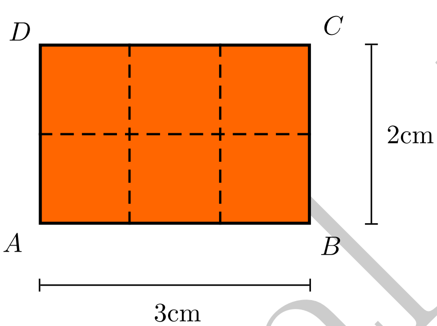
1 Área de retângulos

Nosso objetivo ao longo desse material é encontrar fórmulas que expressem as áreas de algumas figuras planas através de suas dimensões. Para tanto, nosso ponto de partida é um *quadrado unitário*: *por definição*, dizemos que a área de um quadrado de lado 1cm é igual a 1cm^2 (lê-se *um centímetro quadrado*).



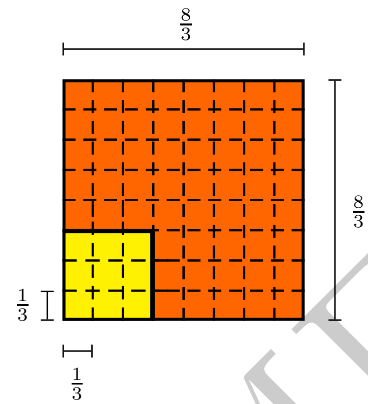
No restante desse material, utilizamos a definição acima para deduzir fórmulas para as áreas de alguns polígonos convexos.

Considere, por exemplo, um retângulo cujos lados medem 2cm e 3cm. A partir de um dos vértices do retângulo, podemos traçar, a cada centímetro, retas perpendiculares aos lados, de modo que o retângulo fique dividido em $2 \cdot 3 = 6$ quadrados de lado 1cm (veja a figura abaixo). Desse modo, a área do retângulo é igual a $2 \cdot 3 = 6$cm^2.



O argumento utilizado para calcular a área do retângulo acima pode ser facilmente estendido para calcular a área de qualquer retângulo cujos lados tenham, por medidas, quantidades inteiras de centímetros: se os lados de um retângulo medem m e n centímetros, com m e n inteiros, então a sua área é igual a $m \cdot n$ cm^2. De fato, argumentando como no exemplo acima, podemos facilmente particionar o retângulo em $m \cdot n$ quadrados unitários.

Calculemos, agora, a área do quadrado desenhado na figura a seguir, cujo lado mede $\frac{8}{3}$cm. Veja que podemos dividir o quadrado unitário (pintado de amarelo) em 9 quadradinhos menores de lado $\frac{1}{3}$cm. Sendo assim, a área de cada um desses quadradinhos menores deve ser igual a $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$cm^2. Por outro lado, traçando retas perpendiculares aos lados, podemos dividir o quadrado de lado $\frac{8}{3}$ em 64 quadradinhos de lado $\frac{1}{3}$. Portanto, concluímos que a



área do quadrado de lado $\frac{8}{3}$cm deve ser igual (em cm^2) a

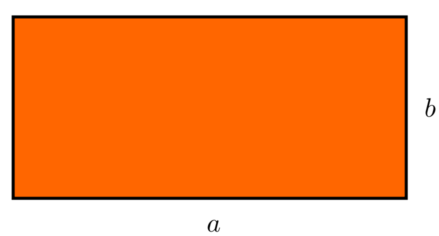
$$64 \cdot \frac{1}{9} = \frac{64}{9} = \left(\frac{8}{3}\right)^2.$$

Adaptando o argumento acima ao caso de retângulos, podemos mostrar sem dificuldade que a área de qualquer retângulo cujos lados têm medidas em centímetros dadas pelos números racionais $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ é igual (em cm^2) a

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

Em retângulos cujos lados possuem medidas irracionais (em cm), a ideia é aproximar (tanto quanto se queira) esses números irracionais por números racionais e concluir que, ainda neste caso, temos que a área é dada (em cm^2) pelo produto das medidas dos lados. Dessa forma, concluímos que:

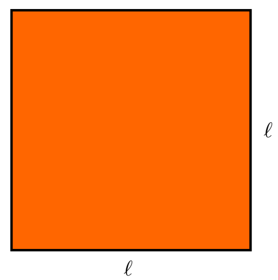
A área de um retângulo de lados a e b é igual a ab.



Como caso particular da fórmula acima (fazendo $a = b = \ell$) temos que:

A área de um quadrado de lado ℓ é igual a ℓ^2.

É importante observar que as fórmulas deduzidas acima, para a área de um quadrado e um retângulo, permanecem válidas independentemente da unidade de comprimento utilizada para medir seus lados. Por exemplo, se chamarmos de unitário um quadrado de lado igual a 1m, e dissermos que sua área é igual a 1m^2 (lê-se *metro quadrado*),



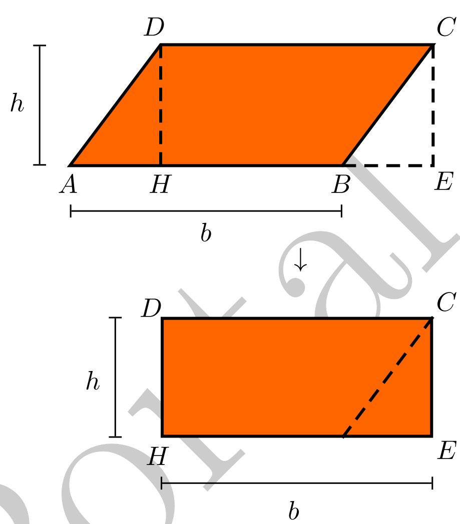
então a área de um quadrado de lado (em m) igual a ℓ será (em m^2) igual a ℓ^2, ao passo que a área de um retângulo de lados (em m) iguais a a e b será (em m^2) igual a ab.

Nesse sentido, o único ponto relevante é como expressar em cm^2 uma área dada em m^2, ou vice-versa. Para fazer isso, basta observar que, tomando um quadrado de lado igual a 1m e dividindo cada lado em 100 partes iguais, particionamos o quadrado em 100^2 quadrados de lados iguais a 1cm cada. Então, calculando áreas, concluímos que

$$1\,\mathrm{m}^2 = 100^2\,\mathrm{cm}^2.$$

2 Áreas de paralelogramos, triângulos e trapézios

Calcularemos, agora, a área do paralelogramo $ABCD$, de base b e altura h, desenhado no alto da figura abaixo:



Consideremos (veja a parte de baixo da figura) a reta perpendicular ao lado CD passando por C e sua interseção E com o prolongamento do lado AB; como AB e CD são paralelos, AE e CE também são perpendiculares. Além disso, denotemos por H o pé da perpendicular ao lado AB passando pelo ponto D.

Afirmamos que os triângulos AHD e BEC são congruentes. De fato, como $DCEH$ é um retângulo, temos $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EH}$ e, daí,

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{AB} - \overline{HB}\\ &= \overline{HE} - \overline{HB}\\ &= \overline{BE};\end{aligned}$$

também, $\overline{AD} = \overline{BC}$, pois são lados opostos de um paralegramo, e $A\widehat{H}D = B\widehat{E}C = 90^{\text{o}}$. A congruência decorre, portanto, pelo caso especial CH, de congruência de triângulos retângulos.

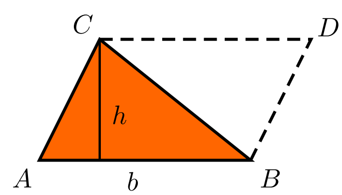
Assim, escrevendo $A(\mathcal{F})$ para denotar a área de uma figura $\mathcal{F}$, concluímos que $A(AHD) = A(BEC)$, de forma que

$$\begin{aligned}A(ABCD) &= A(AHD) + A(HBCD)\\ &= A(BEC) + A(HBCD)\\ &= A(HECD) = \overline{HE} \cdot h\\ &= \overline{AB} \cdot h = bh.\end{aligned}$$

Em resumo,

A área de um paralelogramo de base b e altura h é bh.

Passamos, agora, ao cálculo da área de um triângulo ABC de base $\overline{AB} = b$ e altura h, mostrado em laranja na figura abaixo.



Considere o ponto D tal que $ABDC$ é um paralelogramo. Então, a base de tal paralelogramo mede b e sua altura mede h, de sorte que sua área é igual a bh.

Mas, observe que os triângulos ABC e DCB são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AC} = \overline{DB}$ (por serem pares de lados opostos de um paralelogramo) e o lado BC é comum a ambos. Portanto, temos:

$$A(ABDC) = A(ABC) + A(DCB) = 2A(ABC)$$

e, daí,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}A(ABDC) = \frac{1}{2}bh.$$

Em resumo, concluímos que

A área de um triângulo de base b e altura h é $\frac{1}{2}bh$.

Evidentemente, todo triângulo tem três lados e, para cada um de tais lados, uma altura a ele correspondente. Como o raciocínio anterior não fez distinção alguma em relação ao lado escolhido do triângulo, obtemos a seguinte consequência importante da fórmula acima:

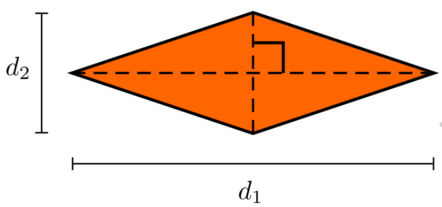
Se os lados de um triângulo medem a, b, c e as alturas correspondentes a tais lados medem h_a, h_b, h_c, respectivamente, então

$$ah_a = bh_b = ch_c.$$

Outra consequência importante da fórmula para a área de triângulos diz respeito ao caso de triângulos retângulos. Nesse caso, sendo a e b os comprimentos dos catetos e vendo o cateto de comprimento a como base, temos que o cateto de comprimento b também será a altura relativa ao cateto de comprimento a. Portanto, concluímos que

Se os catetos de um triângulo retângulo a e b, então sua área mede $\frac{1}{2}ab$.

Como aplicação da fórmula para a área de triângulos, examinemos o caso dos losangos. Observando o losango na figura abaixo, vemos que suas diagonais o dividem em quatro triângulos retângulos congruentes. De fato, como diagonais se intersectam ao meio e os lados do losango têm todos a mesma medida, a congruência entre os quatro triângulos segue do caso LLL; logo, todos os ângulos no ponto de interseção das diagonais são retos.



Se denotarmos as medidas das diagonais do losango por d_1 e d_2, cada um desses triângulos retângulos tem catetos de medidas $\frac{d_1}{2}$ e $\frac{d_2}{2}$. Pela fórmula deduzida acima, para a área de um triângulo retângulo em termos dos catetos, temos que

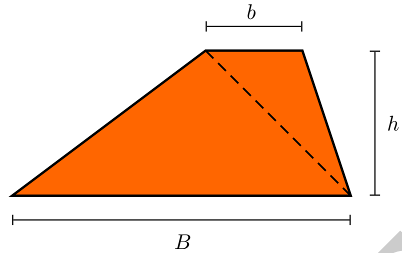
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{1}{8}d_1 d_2.$$

Por fim, somando as áreas dos quatro triângulos, segue que o losango tem área igual a

$$4 \cdot \frac{1}{8}d_1 d_2 = \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

Já em relação ao trapézio da próxima figura, cujas bases paralelas medem B e b e cuja altura mede h, traçando uma de suas diagonais nós o dividimos em dois triângulos, um de base B e altura h e outro de base b e altura h. Portanto, a área do trapézio é dada por

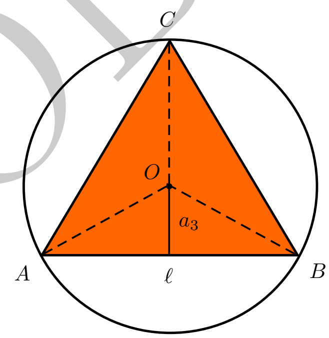
$$\frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}.$$



3 Áreas de polígonos regulares e de círculos

Nesta seção, apresentaremos uma fórmula para o cálculo da área de polígonos regulares em função do apótema e do perímetro do polígono.

Inicialmente, considere o triângulo equilátero ABC de lado ℓ e apótema a_3, inscrito em um círculo de centro O e raio R (veja a figura abaixo).



Como a figura sugere, podemos dividir o triângulo em três triângulos congruentes, OAB, OAC e OBC, todos com área igual a $\frac{1}{2}\ell \cdot a_3$. Então, a área do triângulo equilátero ABC pode ser calculada por

$$\begin{aligned} A(ABC) &= 3 \cdot \frac{\ell \cdot a_3}{2} = \frac{3\ell \cdot a_3}{2} \\ &= \frac{2p_3 \cdot a_3}{2} = p_3 a_3, \end{aligned}$$

em que p_3 é o semiperímetro do triângulo ABC.

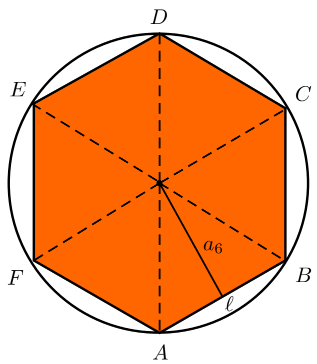
Para expressarmos a área de ABC de outra maneira útil, comece observando que $A\widehat{B}O = 30^{\text{o}}$. Então,

$$\text{tg}\, 30^{\text{o}} = \frac{a_3}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2a_3}{\ell} \Rightarrow a_3 = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}.$$

Dessa forma,

$$A(ABC) = \frac{3\ell a_3}{2} = \frac{\cancel{3}\ell}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{\cancel{6}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Continuando, analisemos o caso de um hexágono regular inscrito num círculo de raio R, desenhado na figura a seguir:



Podemos dividir o hexágono em seis triângulos equiláteros de lado ℓ, os quais todos têm áreas iguais a $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$. Portanto, a área do hexágono $ABCDEF$ é dada por

$$A(ABCDEF) = \cancel{6} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}.$$

De outro modo, observe que cada um dos seis triângulos equiláteros nos quais o hexágono foi dividido tem altura igual a a_6, o apótema do hexágono. Portanto, a área do hexágono $ABCDEF$ é igual à soma das áreas dos seis triângulos:

$$A(ABCDEF) = 6 \cdot \frac{\ell \cdot a_6}{2} = \frac{6\ell \cdot a_6}{2} = p_6 a_6,$$

onde p_6 é o semiperímetro do hexágono.

Mais geralmente, o último argumento acima pode ser repetido para qualquer polígono regular de n lados inscrito no círculo de raio R, e calcula a área desse polígono como igual a $p_n a_n$, onde p_n é o semiperímetro do polígono.

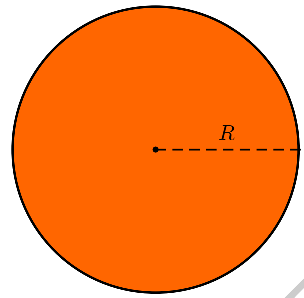
Observe que, à medida que aumentamos o número n de lados do polígono regular inscrito no círculo de raio R, seu perímetro se aproxima mais e mais da circunferência $2\pi R$ do círculo e seu apótema se aproxima cada vez mais do raio R do círculo.

Então, à medida que n aumenta, por um lado a área $p_n a_n$ do polígono se aproxima cada vez mais de

$$\pi R \cdot R = \pi R^2$$

e, por outro, tal área fica cada vez mais próxima da área do disco delimitado pelo círculo. Desse modo, concluímos que

A área de um disco de raio R é dada por πR^2.



Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos ao professor que explique com bastante cuidado a fórmula para a área do retângulo no caso em que as medidas dos lados não são racionais. Para isso, faça desenhos explicando como a área do retângulo pode ser aproximada (por falta e por excesso) por quadrados cujos lados são racionais. Tenha o mesmo cuidado quando for explicar a fórmula para o cálculo da área de círculos.

As referências a seguir abordam o material aqui reunido em maior profundidade e trazem vários exemplos resolvidos e problemas propostos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce, J. N. Pompeo. *Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São paulo, Editora Atual, 2013.