Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Leis dos Cossenos e dos Senos, Polígonos Regulares

Relações Métricas em Polígonos Regulares - Parte 1

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

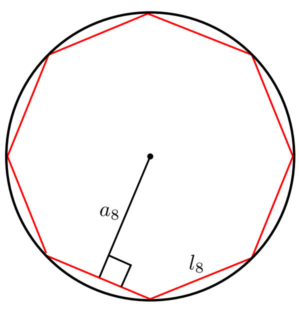
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

5 de agosto de 2018

1 Introdução

Iniciamos esse material lembrando que um polígono convexo é *regular* se os seus lados e de todos os seus ângulos internos são *congruentes*. Lembramos também que todo polígono regular admite um círculo inscrito (isto é, tangente a seus lados e contido em seu interior) e um círculo circunscrito (isto é, que passa por todos os vértices do polígono). Ademais, tais círculos são *concêntricos*, quer dizer, têm um mesmo centro; tal centro comum a esses círculos é denominado o *centro* do polígono regular.

O *apótema* de um polígono regular é a distância do seu centro a um de seus lados. Denotaremos por l_n e por a_n o lado e o apótema de um polígono regular de n lados, respectivamente. Na figura abaixo, podemos observar o lado e o apótema de um octógono regular inscrito em um círculo.



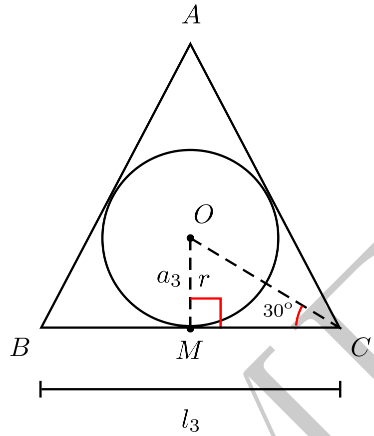
A seguir, apresentaremos, com justificativa, algumas fórmulas que permitem calcular os comprimentos dos lados e apótemas de triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares (polígonos regulares com 3, 4 e 6 lados, respectivamente), a partir do raio do círculo inscrito (ou circunscrito) nesses polígonos.

2 Triângulo equilátero

Considere a figura a seguir, em que ABC é um triângulo equilátero, O é seu centro, r é o raio do círculo inscrito e M o ponto médio do lado BC.

Veja que $A\widehat{C}M = 60^{\text{o}}$. Também, como O equidista dos lados do triângulo, OC é uma bissetriz interna de ABC. Daí, $O\widehat{C}M = 30^{\text{o}}$. Agora, como $\overline{OB} = \overline{OC}$ e M é o ponto médio de BC, temos $O\widehat{M}C = 90^{\text{o}}$. Logo, calculando a tangente do ângulo $\angle OCM$, vem:

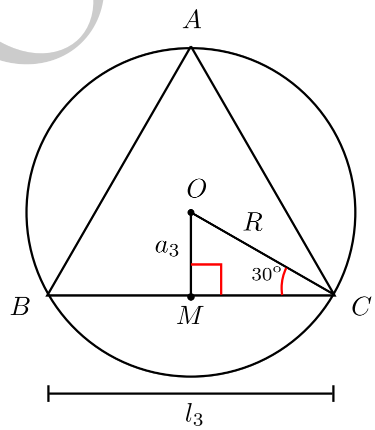
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^{\text{o}} = \frac{r}{\frac{l_3}{2}} &\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\frac{l_3}{2}} \\ &\Longrightarrow \frac{l_3}{2} = r\sqrt{3} \\ &\Longrightarrow l_3 = 2r\sqrt{3}. \end{aligned} \tag{1}$$



Ainda observando a figura acima, temos claramente que

$$a_3 = r.$$

Na próxima figura, temos novamente um triângulo equilátero ABC de centro O, mas dessa vez destacamos seu círculo circunscrito, de raio R. Como antes, M o ponto médio do lado BC.



Por razões já observadas anteriormente, temos $O\widehat{M}C = 90^{\text{o}}$ e $O\widehat{C}M = 30^{\text{o}}$. Portanto, calculando o cosseno e o seno do ângulo $\angle OCM$, obtemos:

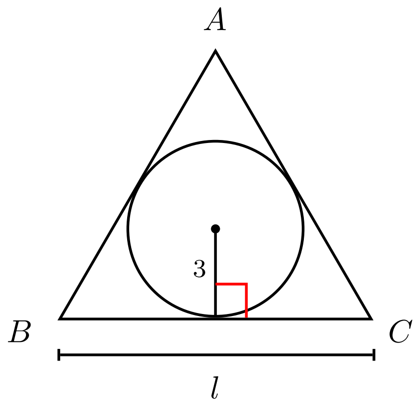
$$\begin{aligned} \cos 30^{\text{o}} = \frac{\frac{l_3}{2}}{R} &\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{l_3}{\cancel{2}R} \\ &\Longrightarrow l_3 = R\sqrt{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^{\text{o}} = \frac{a_3}{R} &\Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a_3}{R} \\ &\Longrightarrow a_3 = \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

O exemplo a seguir exercita a discussão acima. Por comodidade, em sua solução aplicamos diretamente a fórmula que obtivemos para l_3 em função do raio do círculo inscrito. Entretanto, após compreender a dedução de tal fórmula, sugerimos que, sempre que ela se fizer necessária, o leitor aplique o raciocínio utilizado para deduzi-la, em vez de tentar dela lembrar-se. Tal raciocínio é bastante simples e, nas notações das figuras anteriores, resume-se a aplicar a trigonometria do triângulo retângulo ao triângulo OCM. Evidentemente, um comentário análogo é válido para quaisquer outras fórmulas deduzidas acima.

Exemplo 1. *Encontre o perímetro do triângulo equilátero ABC, dado na figura abaixo (as medidas são dadas em centímetros).*



Solução. Veja que o raio do círculo inscrito no triângulo é igual a 3 cm. Assim, utilizando a fórmula (1) e com base na figura acima, temos:

$$l = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Portanto, como ABC é um triângulo equilátero, seu perímetro é dado por

$$3 \cdot l = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ cm.}$$

□

3 Quadrado

Sejam r o raio do círculo inscrito e O o centro de um quadrado $ABCD$ (veja a próxima figura).

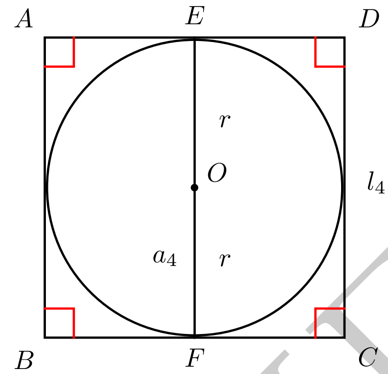
Claramente, temos

$$a_4 = r.$$

Por outro lado, o diâmetro que passa por O, sendo perpendicular a dois lados de $ABCD$, o divide em dois retângulos. Então,

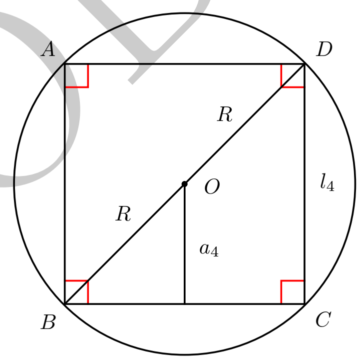
$$l_4 = 2r.$$

De passagem, observamos que, como $a_4 = \frac{l_4}{2}$, os triângulos retângulos AEO e COF são isósceles. Assim,



$A\widehat{O}E = C\widehat{O}F = 45°$, de sorte que A, O e C são colineares. Uma vez que um raciocínio análogo é válido para B, O e D, concluímos que *em todo quadrado, as diagonais cruzam-se em seu centro.*

Agora, seja R o raio do círculo circunscrito a $ABCD$ (veja a figura abaixo).



Conforme mostramos acima, as diagonais de $ABCD$ cruzam-se em O. Assim, por um lado, elas medem $2R$ e, por outro (aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BCD, concluímos que elas medem $l_4\sqrt{2}$. Então, obtemos:

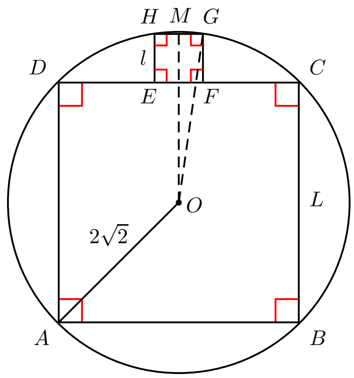
$$\begin{aligned} l_4\sqrt{2} = 2R &\Longrightarrow l_4 = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &\Longrightarrow l_4 = \frac{\cancel{2}R\sqrt{2}}{\cancel{2}} \\ &\Longrightarrow l_4 = R\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Além disso,

$$a_4 = \frac{l_4}{2} \Longrightarrow a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo 2. *Na figura a seguir, o raio do círculo circunscrito ao quadrado $ABCD$ mede $2\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida l do lado do quadrado $EFGH$, em que os pontos E, F estão sobre o lado CD e os pontos G, H estão sobre o círculo.*

Solução. Seja M o ponto médio do lado GH. Como GH é uma corda do círculo, temos que o triângulo OMG é



retângulo em M. Assim, se L é a medida do lado do quadrado $ABCD$, então

$$OM = \frac{L}{2} + l, \quad MG = \frac{l}{2}, \quad \text{e} \quad OG = 2\sqrt{2}.$$

Além disso, como a medida do raio do círculo circunscrito é $2\sqrt{2}$ cm, segue de (2) que

$$L = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \text{ cm}.$$

Logo, o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo OMG nos dá:

$$\begin{aligned}
\overline{OM}^2 + \overline{MG}^2 = \overline{OG}^2 &\Longrightarrow \left(\frac{L}{2} + l\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \\
&\Longrightarrow (2 + l)^2 + \frac{l^2}{4} = 8 \\
&\Longrightarrow 4 + 4l + l^2 + \frac{l^2}{4} = 8 \\
&\Longrightarrow \frac{5l^2}{4} + 4l - 4 = 0 \\
&\Longrightarrow 5l^2 + 16l - 16 = 0.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima, obtemos $l = \frac{4}{5} = 0,8$ ou $l = -4$. Mas, como l é a medida do lado do quadrado $EFGH$, devemos ter $l > 0$. Daí, segue que $l = 0,8$ cm. □

Exemplo 3. *Enconre a razão entre o perímetro do quadrado inscrito em um círculo de raio R e o perímetro do quadrado circuscrito a esse círculo.*

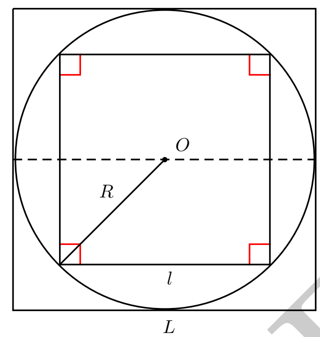
Solução. Nas notações da próxima figura, sejam l e L os lados dos quadrados inscrito e circunscrito ao círculo, respectivamente. Conforme estabelecemos anteriormente, temos:

$$L = 2R \quad \text{e} \quad l = R\sqrt{2}.$$

Uma vez que os perímetros dos quadrados inscrito e circunscrito ao círculo são respectivamente iguais a $4l$ e $4L$, temos que

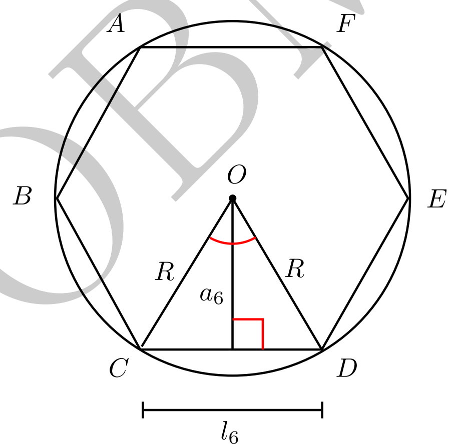
$$\frac{\cancel{4}l}{\cancel{4}L} = \frac{l}{L} = \frac{\cancel{R}\sqrt{2}}{2\cancel{R}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□



4 Hexágono

Na figura abaixo, R é o raio do círculo circunscrito ao hexágono regular $ABCDEF$.



Observe que o triângulo OCD é isósceles e $C\widehat{O}D = \frac{360^o}{6} = 60^o$. Assim, OCD é, de fato, equilátero, o que nos dá

$$l_6 = R.$$

Além disso, a_6 é a altura do triângulo equilátero OCD, cujo lado mede R. Daí, já vimos que

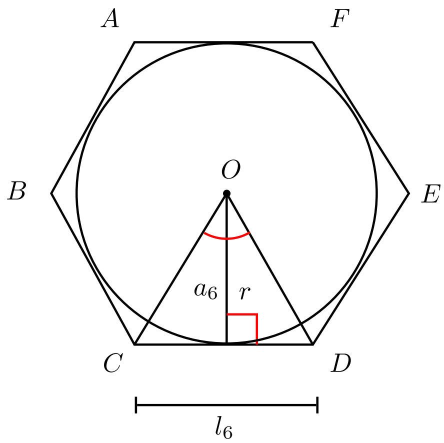
$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Finalmente, seja r o raio do círculo inscrito no hexágono regular $ABCDEF$ (veja a figura a seguir). Claramente, temos

$$a_6 = r.$$

Por outro lado, como OCD é um triângulo equilátero e r é a medida da altura deste triângulo, temos

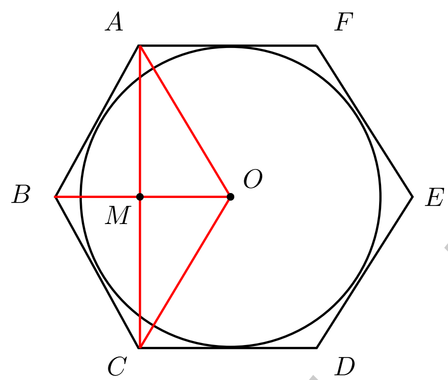
$$\begin{aligned}
r = \frac{l_6\sqrt{3}}{2} &\Longrightarrow l_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}} \\
&\Longrightarrow l_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad (3) \\
&\Longrightarrow l_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$



Exemplo 4. *No hexágono regular* $ABCDEF$ *da próxima figura, o lado mede* 10 *cm. Calcule:*

(a) a medida do raio do círculo inscrito em tal hexágono;

(b) a medida da diagonal AC*.*



Solução. Sendo r o raio do círculo inscrito e utilizando a fórmula (3), obtemos:

$$\begin{aligned} 10 = \frac{2r\sqrt{3}}{3} &\Longrightarrow r = \frac{\cancel{30}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} \\ &\Longrightarrow r = \frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &\Longrightarrow r = \frac{\cancel{15}\sqrt{3}}{\cancel{3}} \\ &\Longrightarrow r = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Agora, seja M o ponto de interseção dos segmentos AC e BO. Como os triângulos OAB e OBC são equiláteros, temos em particular que

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BO} = \overline{BC} = \overline{CO}.$$

Então, $ABCO$ é um losango e, como tal, suas diagonais AC e OB encontram-se em seus pontos médios e são perpendiculares. Desse modo, AM é uma altura do triângulo equilátero OAB.

Como as alturas de um triângulo equilátero têm comprimentos iguais, concluímos que $\overline{AM} = r$. Analogamente, $\overline{CM} = r$. Portanto,

$$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{CM} = 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos ao professor enfatizar a simplicidade dos cálculos envolvidos na dedução das fórmulas para a_3, l_3, a_4, l_4, a_6, l_6, sempre alertando os alunos para o fato de que não devem tentar memorizá-las, e sim deduzi-las quando necessário.

Há fórmulas que nos permitem calcular o lado e o apótema de outros polígonos regulares, como o pentágono, o octógono e o decágono, em função dos raios dos círculos inscrito e circunscrito a tais polígonos. Caso haja tempo disponível, suas deduções, apesar de bem mais trabalhosas que as que apresentamos aqui, formam excelente continuação deste material. De todo modo, as referências a seguir trazem os cálculos correspondentes, além de conterem mais exemplos e problemas de variados graus de dificuldade.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. São paulo, Editora Atual, 2013.