Material Teórico - Módulo: Função Afim

Noções Básicas - Parte 2

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

6 de Julho de 2025

Portal da Matemática
OBMEP

1 Gráfico de uma função afim

Lembremos que o gráfico de uma função $f : A \to B$, denotado por $\text{Graf}(f)$, é o subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, formado pelos pares ordenados $(a, f(a))$, com $a \in A$.

No caso em que $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, é possível identificar $\text{Graf}(f)$ com um conjunto de pontos do plano cartesiano, fazendo com que o gráfico $\text{Graf}(f)$ passe a ser uma *representação geométrica* da função f.

Em uma material anterior (Funções - Noções Básicas - Parte 3, Exemplo 6) vimos que o gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x + 1$, é uma reta. Nesta seção, vamos mostrar que o gráfico de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geral, dada por $f(x) = ax + b$, é uma reta, e daremos interpretações geométricas para os coeficientes a e b.

Caso você ache conveniente, sugerimos que releia, agora, o exemplo exibido no material citado acima, pois repetiremos o mesmo argumento lá utilizado.

Teorema 1. *O gráfico de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma reta.*

Prova. Seja f afim, dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos os pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$, ambos pertencentes ao gráfico de f (acompanhe a discussão na figura 1). Vamos mostrar que um ponto qualquer $(x, f(x))$ do gráfico de f, com $x \neq 0, 1$, está sobre a reta que passa por $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$.

Observando a figura, vemos que $\overline{OA} = 1 - 0 = 1$, $\overline{EC} = f(1) - f(0) = a \cdot 1 + b - a \cdot 0 - b = a$, $\overline{AB} = x - 1$ e $\overline{CD} = f(x) - f(1) = ax + b - a - b = a(x - 1)$. Assim,

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{a}{1} = a$$

e

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{a(x-1)}{x-1} = a.$$

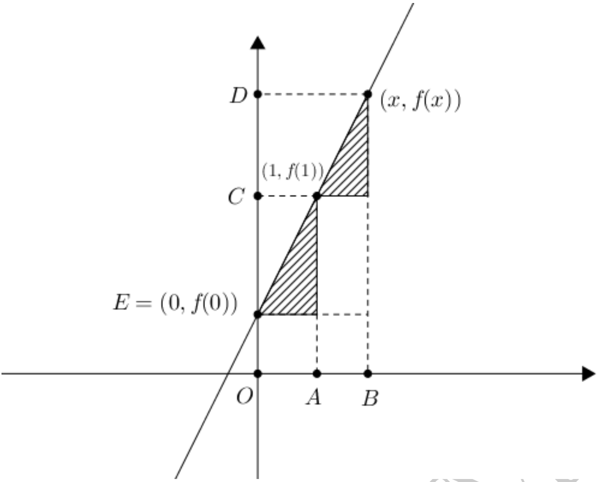

Figura 1: o gráfico de uma função afim é uma reta.

Portanto,

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}},$$

de sorte que os dois triângulos retângulos tracejados na figura têm catetos proporcionais.

Como ambos os triângulos são retângulos nos vértices não destacados na figura, o caso LAL de semelhança de triângulos garante que eles são semelhantes. Em particular, os ângulos formados pelas hipotenusas dos mesmos com a horizontal são congruentes, e isso significa que os pontos $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ e $(x, f(x))$ são colineares. Por fim, como $(x, f(x))$ é um ponto qualquer do gráfico, concluímos que o gráfico de f é a reta que passa pelos pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$. $\square$

O teorema anterior admite a seguinte recíproca.

Teorema 2. *Se o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma reta, então a função é afim.*

Prova. Uma vez que $\text{Graf}(f)$ é uma reta, os pontos $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ e $(x, f(x))$ são colineares, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Assim, os triângulos retângulos tracejados na figura 1 são semelhantes, mas dessa vez pelo caso AA de semelhança (de fato, os ângulos dos dois triângulos são congruentes em pares, uma vez que ambos são retângulos e têm catetos paralelos em pares). Portanto, vale a seguinte relação entre seus catetos:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

Note que, como na demonstração do teorema anterior, ainda temos $\overline{EC} = f(1) - f(0)$, $\overline{OA} = 1$, $\overline{CD} = f(x) - f(1)$ e $\overline{AB} = x - 1$. Portanto, a igualdade anterior torna-se

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Essa última igualdade, resolvida para $f(x)$, implica

$$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0),$$

para todo real $x \neq 0, 1$. Observe, contudo, que ela continua trivialmente verdadeira para $x = 0, 1$, de forma que é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por fim, denotando $a = f(1) - f(0)$ e $b = f(0)$, obtemos $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Logo, f é uma função afim. $\square$

Observação 3. *Sabemos, da geometria plana, que dois pontos determinam uma reta. Por outro lado, se o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma reta, vimos que a função é afim. Desse modo, podemos afirmar que uma função afim fica totalmente determinada se soubermos as imagens de dois dos elementos de seu domínio. Realmente, na demonstração do teorema anterior, usamos os pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$ para determinar a expressão da função afim cujo gráfico é uma reta dada.*

A seguir, veremos que os coeficientes a e b da função afim dada por $f(x) = ax + b$ têm significados *geométricos*.

Primeiramente, como $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, o coeficiente b é igual à ordenada do ponto $(0, f(0))$, onde o gráfico de f intersecta o eixo y. Por essa razão, chamamos b de **coeficiente linear** do gráfico de f (veja a figura 2).

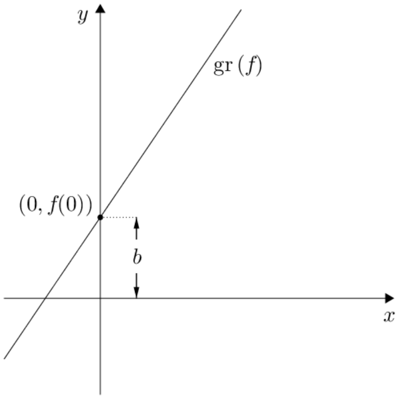

Figura 2: o coeficiente linear.

Consideremos, agora, os pontos $A = (0, f(0))$ e $B = (1, f(1))$ sobre $\operatorname{gr}(f)$. O ângulo θ que o gráfico de f forma com a horizontal é ângulo interno do triângulo retângulo ABC (veja a figura 3).

A tangente desse ângulo é, por definição,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = a + b - b = a.$$

Dessa forma, o coeficiente a é igual à tangente do ângulo que a reta $\operatorname{gr}(f)$ forma com a horizontal. Por isso chamamos a de **coeficiente angular** do gráfico de f.

Alguns casos particulares merecem atenção especial.

(1) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função constante, dada por $f(x) = b$, então $\operatorname{tg}\theta = a = 0$, o que implica $\theta = 0$. Logo, o seu gráfico é uma reta horizontal.

(2) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função identidade, dada por $f(x) = x$, então $\operatorname{tg}\theta = a = 1$ o que implica $\theta = 45°$. Isso significa que o gráfico de f é a bissetriz dos ângulos retos que formam o primeiro e o terceiro quadrantes (veja o Lema 10 do material *Funções - Noções Básicas - Parte 4*).

Dizemos, pois, que o gráfico da função identidade é a *bissetriz dos quadrantes ímpares*.

(3) Uma reta *vertical* r não pode ser gráfico de uma função, pois dois pontos quaisquer dessa reta têm a mesma abscissa. Sendo assim, se fosse $r = \text{gr}\,(f)$, dois pontos distintos de r seriam do tipo (x, y) e (x, y'), com $y \neq y'$. Porém $(x, y), (x, y') \in \text{gr}\,(f)$ implicam $y = f(x)$ e $y' = f(x)$, ou seja, x teria duas imagens diferentes, o que não é possível se f for uma função.

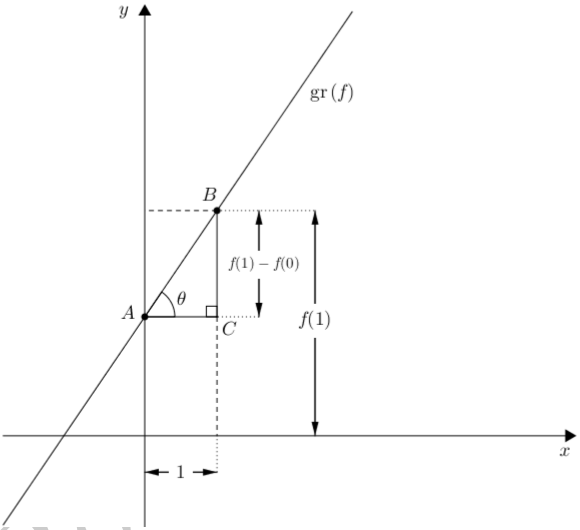

Figura 3: o coeficiente angular.

No caso em que o domínio de uma função afim f é um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, o gráfico de f é um subconjunto da reta que é gráfico de f, com o domínio estendido a todos os reais. A seguir, vemos um exemplo nesse sentido.

Exemplo 4. *O gráfico da função $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x - 1$ é o segmento de reta que liga os pontos $(1, f(1)) = (1,2)$ a $(2, f(2)) = (2,5)$(veja a figura 4). Esse segmento de reta está contido na reta $r = \mathrm{gr}\,(F)$, onde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = 3x - 1$, estende o domínio da função f a todos os números reais.*

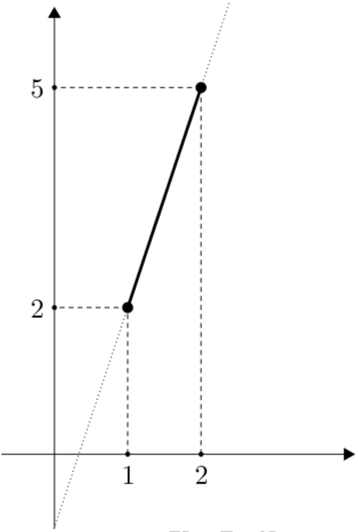

Figura 4: o segmento de reta que é gráfico da função afim $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x - 1$.

Terminamos este material apresentando um exemplo que ilustra uma aplicação de funções afins que está além do material de que dispomos. Tal aplicação diz respeito ao problema de encontrar a função afim que *melhor aproxima* uma função dada, num entorno suficientemente pequeno de um ponto de seu domínio.

Historicamente, o desenvolvimento das técnicas para obter essa *melhor aproximação* deu origem ao *Cálculo Dife-*

rencial, área da Matemática de importância central para a ciência moderna.

Exemplo 5. *Seja* $\mathbb{R}_+$ *o conjunto dos números reais não negativos. As funções* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*, dadas por* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = \frac{x}{4} + 1$*, têm seus gráficos esboçados na figura 5.*

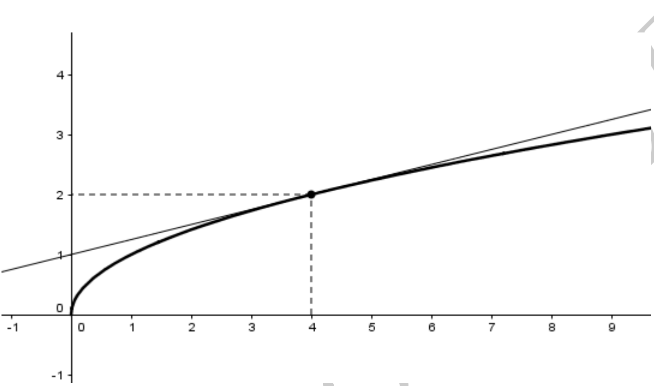

Figura 5: os gráficos das funções f e g. Note que a reta tangencia a curva no ponto $(4, 2)$.

Como a figura sugere, os gráficos só tem o ponto $(4, 2)$ *em comum. Realmente, se* $x \geq 0$ *for tal que* $f(x) = g(x)$*, então* $\sqrt{x} = \frac{x}{4} + 1$*, o que é o mesmo que* $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^2 = 0$*. Portanto,* $\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 = 0$*, logo,* $x = 4$*. Veja, ainda, que, para* $x \neq 4$*, tem-se*

$$g(x) - f(x) = \frac{x}{4} + 1 - \sqrt{x} = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^2 > 0,$$

de modo que o ponto $(x, g(x))$ *está acima do ponto* $(x, f(x))$*. Assim, intuitivamente,* $(4, 2)$ *é um* ponto de tangência *dos dois gráficos.*

Nas proximidades do ponto de tangência $(4,2)$, *a distância vertical entre os dois gráficos é dada por* $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^2$, *logo, é pequena. Assim, para valores de* x *próximos à abscissa do ponto de tangência, isto é, para valores de* x *próximos de* 4, *temos que* $\sqrt{x}=f(x)$ *pode ser razoavelmente bem aproximado por* $g(x)$. *Por exemplo,*

$$\sqrt{5}=f(5)\cong g(5)=\frac{5}{4}+1=2,25.$$

Usando uma calculadora, você pode verificar que $\sqrt{5}\cong 2{,}236$, *com três casas decinais exatas. Isso significa que* $g(5)=2,25$ *é uma aproximação de* $\sqrt{5}$ *com uma casa decimal exata. Para um outro exemplo, temos*

$$g(4{,}5)=\frac{4,5}{4}+1=2{,}125.$$

Usando novamente uma calculadora, podemos verificar que $f(4{,}5)=\sqrt{4{,}5}\cong 2{,}121$. *Logo,* $g(4,5)=2{,}125$ *é uma aproximação de* $\sqrt{4,5}$ *com duas casas decimais exatas.*

Dicas para o Professor

Um ou dois encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir este material.

Conforme observamos nas *Dicas para o Professor* da primeira parte do material, uma razão muito importante para estudar funções afins é que é possível estudar funções mais gerais usando funções afins como uma primeira aproximação. Fizemos isso no Exemplo 5, muito embora não discutimos como encontrar a função g a partir da função f (contudo, teremos mais a dizer sobre isso mais adiante).

Faça experiências com seus alunos envolvendo aproximações de raízes quadradas ou raízes cúbicas. Você vai precisar um pouco de Cálculo Diferencial (derivadas) para elaborar os exemplos, mas não precisa falar sobre Cálculo para os alunos. Uma vez obtida a função afim que aproxima uma função dada em torno de um ponto (como no exemplo 5), você pode usar um software de geometria dinâmica para traçar os gráficos e, visualmente, checar com seus alunos a proximidade dos dois gráficos em torno do ponto em questão (como na figura 5).

Algum aluno mais curioso pode questionar como obter a expressão da função afim cujo gráfico tangencia o gráfico da função dada (no exemplo 5, como encontramos $g(x) = \frac{x}{4} + 1$ a partir de $f(x) = \sqrt{x}$?). Nesse caso, fale sobre a existência de uma técnica para descobrir a lei de formação de g (a derivação). Dependendo do nível da turma, você pode citar o Teorema 7 da Parte 1 e dizer que a derivada de uma função afim é dada pela expressão da taxa de variação e coincide com seu coeficiente algular, mas que, para funções mais gerais, essa taxa de variação não é constante, o que dificulta o seu tratamento em nível elementar.

O estudo da taxa de variação da função afim, como exibido neste texto, de sua interpretação geométrica como coeficiente angular e de aplicações como a do exemplo 5, são excelentes oportunidades para se falar sobre um dos conceitos fundamentais do Cálculo (e da ciência moderna): a *derivada*. Nesse caso, podemos fazê-lo em um contexto elementar (isto é, sem o uso de limites), devido à simplicidade das funções afins.

As referências listadas a seguir discutem funções em geral, e afins em particular. As referências [2] e [3] trazem vários problemas simples envolvendo funções afins, ao passo que a referência [1] estende o estudo de funções até os rudimentos do Cálculo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, volume 3: Introdução à Análise*, terceira edição. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, volume 1: Conjuntos Numéricos e Funções*. Editora

Atual, São Paulo, 2013.

3. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio, volume 1.* Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 1998.