Material Teórico - Módulo de ESTATÍSTICA

As Diferentes Médias

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto
Revisor: Prof. Francisco Bruno Holanda

Portal da Matemática
OBMEP

Nesta aula, pausamos a discussão de Estatística para discutir algumas *médias* associadas a conjuntos finitos de números reais, assim como algumas desigualdades entre tais médias. Estas, por sua vez, serão utilizadas na próxima aula para obter algumas desigualdades entre as medidas de dispersão estudadas anteriormente. Para mais sobre desigualdades, remetemos o leitor à referência [1].

1 A desigualdade triangular

Começamos discutindo uma desigualdade entre números reais conhecida como a **desigualdade triangular**.

Teorema 1 (Desigualdade Triangular). *Se u e v são números reais quaisquer, então:*

$$|u+v| \le |u| + |v|. \tag{1}$$

Prova. Sabemos que $|u| \ge u$ e $|v| \ge v$. Somando essas duas desigualdades, obtemos

$$|u| + |v| \ge u + v.$$

Por outro lado, também é verdade que $|u| \ge -u$ e $|v| \ge -v$. Somando estas duas desigualdades, obtemos

$$|u| + |v| \ge -(u+v).$$

Por fim, como $|u+v| = u+v$ ou $|u+v| = -(u+v)$, obtemos

$$|u| + |v| \ge \max\{u+v, -(u+v)\} = |u+v|.$$

□

Ainda em relação à desigualdade triangular, é importante considerarmos os três corolários seguintes:

I. $|u-v| \le |u| + |v|$: basta observar que

$$|u-v| = |u+(-v)| \le |u| + |-v| = |u| + |v|,$$

onde, na desigualdade acima, utilizamos a desigualdade triangular para u e $-v$.

II. $|u-v| \ge |u| - |v|$: basta notar que

$$|u| = |v + (u-v)| \le |v| + |u-v|,$$

onde, na desigualdade acima, utilizamos a desigualdade triangular para v e $u-v$.

III. $|u-v| \ge ||u| - |v||$: inicialmente, observando que $|w| = |-w|$ para todo real w, e em seguida trocando os papéis de u e v no item II, obtemos

$$|u-v| = |-(v-u)| = |v-u| \ge |v| - |u|.$$

Portanto,

$$|u-v| \ge \max\{|u|-|v|, |v|-|u|\} = ||u|-|v||.$$

A desigualdade triangular pode ser estendida a mais de dois números reais. O exemplo a seguir mostra como fazê-lo para três números.

Exemplo 2. *Dados números reais u, v e w, temos*

$$|u+v+w| \le |u| + |v| + |w|.$$

Prova. Basta aplicarmos (1) duas vezes:

$$\begin{aligned} |u+v+w| &= |(u+v)+w| \\ &\le |u+v| + |w| \\ &\le (|u|+|v|) + |w| \\ &= |u| + |v| + |w|. \end{aligned}$$

□

Tendo em vista (1) e a generalização acima, é relativamente simples intuir que vale a seguinte desigualdade geral, a qual também é conhecida como a **desigualdade triangular**:

$$|u_1 + u_2 + \cdots + u_n| \le |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|, \tag{2}$$

para todo natural $n \ge 2$ e todos os reais $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Uma demonstração pode ser encontrada na referência [1].

2 As médias aritmética e quadrática

Nesta seção, apresentamos duas médias que serão interpretadas estatisticamente na próxima aula.

Definição 2.1

ejam $a_1, a_2, ..., a_n$ reais positivos. A **média aritmética** (MA) deste conjunto de valores é definida por

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Em Estatística, a média aritmética é conhecida apenas por *média*, sendo considerada uma medida de tendência central.

Dividindo ambos os membros de (2) por n, obtemos

$$\left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right| \le \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|}{n}.$$

Em palavras, a desigualdade acima diz que *o módulo da média aritmética de um conjunto finito de reais é menor ou igual que a média aritmética dos módulos desses mesmos reais.*

A próxima definição, por outro lado, está relacionada com o desvio-padrão, por envolver a média de termos quadráticos.

Definição 2.2

Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ reais positivos. A **média quadrática** (MQ) deste conjunto de valores é definida por

$$MQ = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Dessa forma, vemos que a média quadrática é a raiz quadrada da média dos termos, todos elevados ao quadrado.

Vamos, agora, demonstrar como estas duas medidas estão relacionadas através da desigualdade $MQ \geq MA$. Mostraremos também que a igualdade ocorre se e só se todos os termos $a_1, ..., a_n$ forem iguais.

Teorema 3. *Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são reais positivos, então*

$$MQ \geq MA,$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1, ..., a_n$ forem todos iguais.

Prova. Primeiramente, temos a equivalência

$$MQ \geq MA \Leftrightarrow MQ^2 \geq MA^2,$$

a qual também pode ser reescrita (multiplicando ambos os lados por n^2) como

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2. \qquad (3)$$

Agora, veja que podemos expandir o lado direito da desigualdade acima da seguinte forma:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j,$$

ou seja, o quadrado da soma de n termos é igual a soma dos quadrados desses termos, mais duas vezes a soma dos produtos de tais termos, tomados dois a dois.

Substituindo a última relação acima no segundo membro de (3) e cancelando uma parcela $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, concluímos que a desigualdade desejada é equivalente a

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq 2\sum_{i<j} a_i a_j. \qquad (4)$$

Antes de continuarmos a demonstração é conveniente, para o bem da compreensão por parte do leitor, examinar como (4) pode ser verificada para os valores particulares $n = 2$ e $n = 3$.

(i) Quando $n = 2$:

$$\begin{aligned} (4) \ &\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2 \\ &\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Por sua vez, a última desigualdade é obviamente verdadeira, uma vez que nenhum quadrado de número real é negativo.

(ii) Quando $n = 3$:

$$\begin{aligned} (4) \ &\Leftrightarrow 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 \geq 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3 \\ &\Leftrightarrow (a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2) + (a_1^2 + a_3^2 - 2a_1a_3) \\ &\quad + (a_3^2 + a_2^2 - 2a_3a_2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_3 - a_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Como no caso anterior, a última desigualdade é verdadeira, uma vez que uma soma de quadrados de números reais nunca é negativa.

Voltando ao caso geral, podemos raciocinar de modo análogo aos casos particulares acima. Mais precisamente, escrevendo (4) como

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - 2\sum_{i<j} a_i a_j \geq 0,$$

podemos rearranjar todos os termos do primeiro membro de forma a completar quadrados, obtendo a seguinte desigualdade equivalente:

$$\sum_{i<j} (a_i - a_j)^2 \geq 0.$$

Como antes, tal desigualdade é verdadeira, pela não negatividade de uma soma de quadrados de reais. Além disso, é também claro que a última soma acima é positiva se pelo menos dois dentre os números $a_1, \ldots, a_n$ forem distintos. Portanto, $MQ = MA$ se e somente se todos os quadrados acima forem iguais a 0, i.e., se e somente se todos os termos $a_1, \ldots, a_n$ forem iguais. $\square$

O próximo resultado relevante para nós é o seguinte:

Teorema 4. *Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são reais positivos, então*

$$MQ \leq \max\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Prova. Seja $M = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. Pela própria definição de máximo, temos que

$$a_1 \leq M \Rightarrow a_1^2 \leq M^2$$

$$a_2 \leq M \Rightarrow a_2^2 \leq M^2$$

$$\vdots$$

$$a_n \leq M \Rightarrow a_n^2 \leq M^2$$

Em palavras, cada um dos termos é menor que ou igual ao máximo e, consequentemente, cada um dos termos ao quadrado é menor que ou igual ao quadrado do máximo.

Somando membro a membro todas as desigualdades acima, obtemos:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq nM^2.$$

Dividindo ambos os lados por n e tirando a raiz quadrada em seguida, obtemos

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \leq M,$$

conforme queríamos mostrar. □

Na próxima aula, também precisaremos do seguinte resultado.

Teorema 5. *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ reais positivos e $\Delta = \max\{|a_i - a_j|; 1 \leq i, j \leq n\}$. Então:*

$$MQ^2 - MA^2 \leq \frac{1}{n^2}\binom{n}{2}\Delta^2.$$

Prova. Da demonstração do Teorema 3, sabemos que

$$MQ^2 - MA^2 = \frac{\sum_{i<j}(a_i - a_j)^2}{n^2}.$$

Por outro lado, cada um dos termos $|a_i - a_j|$ é menor que ou igual a Δ, o qual representa a diferença máxima, em módulo, entre dois elementos quaisquer da lista $a_1, a_2, ..., a_n$. Como temos $\binom{n}{2}$ maneiras de escolher dois termos dessa lista, devemos ter

$$\sum_{i<j}(a_i - a_j)^2 \leq \binom{n}{2}\Delta^2.$$

Por fim, juntando as duas desigualdades acima, obtemos a desigualdade do enunciado. □

A partir desse último teorema, podemos fazer duas observações importantes:

(i) Veja que $\frac{1}{n^2}\binom{n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right) < \frac{1}{2}$ para todo natural $n > 1$. Dessa forma,

$$MQ^2 < MA^2 + \frac{\Delta^2}{2}. \qquad (5)$$

(ii) Se $MA \leq \frac{\Delta}{\sqrt{2}}$, então

$$MA^2 + \frac{\Delta^2}{2} \leq \Delta^2$$

e, consequentemente, $MQ \leq \Delta$.

3 Exercícios

Esta seção exercita as desigualdades estudadas até aqui, discutindo alguns exemplos interessantes.

Exemplo 6. *Dado um real positivo a, sabe-se que a média quadrática dos números a, $a-1$ e 2 é menor ou igual a $\sqrt{2}$. Encontre o maior valor possível para a.*

Solução. A condição $MQ \leq \sqrt{2}$ equivale a

$$\frac{a^2 + (a-1)^2 + 4}{3} \leq 2.$$

Por sua vez, utilizando um pouco de Álgebra elementar, tal desigualdade equivale a

$$a^2 - a - 1 \leq 0.$$

Então, a teoria de máximos e mínimos de funções quadráticas garante que $a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Exemplo 7. *Dados números reais a e b, encontre o menor valor possível para a soma*

$$|a-1| + |a+b-2| + |b-3|.$$

Solução. Começamos aplicando a desigualdade triangular para três números, de um jeito *esperto*:

$$\begin{aligned} &|a-1| + |a+b-2| + |b-3| = \\ &= |1-a| + |a+b-2| + |3-b| \\ &\geq |(1-a) + (a+b-2) + (3-b)| \\ &= |1-2+3| = 2. \end{aligned}$$

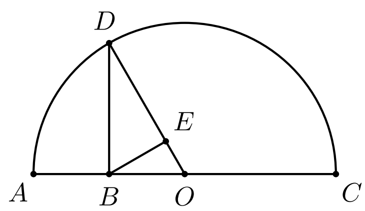
Portanto, a expressão do enunciado é sempre maior ou igual a 2. Para ver que 2 é realmente seu valor mínimo, temos de mostrar que ele é *atingido*, isto é, que existem valores reais para a e b tais que a soma do enunciado vale 2. Isso é simples: basta tomar $a = b = 1$, por exemplo. □

Para o próximo exemplo, dados reais positivos a e b, definimos suas médias **geométrica** MG e **harmônica** MH por

$$MG = \sqrt{ab} \quad \text{e} \quad MH = \frac{2ab}{a+b}.$$

Precisaremos também de alguns fatos elementares de Geometria Euclidiana Plana, para os quais remetemos o leitor a [2], por exemplo.

Exemplo 8. *Na figura abaixo, os segmentos AB e BC têm comprimentos a e b, respectivamente, e o semicírculo tem centro O. A perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ passando por B intersecta o semicírculo em D.*



Se E é o pé da perpendicular baixada de B ao segmento DO, faça o que se pede:

(a) *Calcule, em função de a e b, os comprimentos dos segmentos BD, DE e DO.*

(b) *Conclua que, para os números reais a e b, vale*

$$MA \geq MG \geq MH,$$

com uma qualquer das desigualdades tornando-se uma igualdade se, e só se $a = b$.

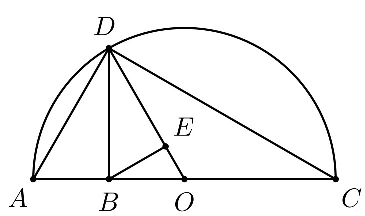
Solução. Para o item (a), note inicialmente que o diâmetro AC do semicírculo vale

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = a + b.$$

Então, como DO é raio do semicírculo, temos

$$\overline{DO} = \frac{a+b}{2}.$$

Para os cálculos dos outros dois segmentos, traçamos AD e CD, obtendo a figura a seguir:



Como o triângulo ACD está inscrito em um semicírculo, temos $A\widehat{D}C = 90°$. Então, BD é a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ACD e DE é a projeção, sobre a hipotenusa, do cateto BD do triângulo retângulo BDO. Portanto, aplicando as relações métricas usuais em triângulos retângulos sucessivamente a ACD e BDO, obtemos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = ab \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{ab}$$

e

$$\overline{DE} \cdot \overline{DO} = \overline{BD}^2 \Rightarrow \overline{DE} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{DO}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Para o item (b) recorde que, em todo triângulo retângulo, a hipotenusa é o maior lado. Assim, analisando os triângulos retângulos BDO e BDE, obtemos $\overline{DO} \geq \overline{BD}$ e $\overline{BD} \geq \overline{DE}$, ou ainda

$$\overline{DO} \geq \overline{BD} \geq \overline{DE}. \tag{6}$$

O uso do símbolo $\geq$, em vez do símbolo $>$, vem do fato de que há a possibilidade de que tais triângulos sejam *degenerados*, isto é, que reduzam-se a segmentos de reta. Observe que tal ocorre se, e só se, os pontos B e O coincidirem, o que por sua vez ocorre se e só se $\overline{AB} = \overline{BC}$, quer dizer, $a = b$.

Por fim, substituindo em (6) os valores calculados acima para $\overline{DO}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$, chegamos a

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}.$$

□

A desigualdade $MA \geq MG \geq MH$, provada para dois números reais positivos no exemplo anterior, também é válida para $n \geq 2$ reais positivos a_1, a_2, $\ldots$, a_n, se definirmos suas médias **geométrica** MG e **harmônica** MH respectivamente por

$$MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

e

$$MH = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}.$$

Para uma demonstração, veja [1].

Observamos, contudo, que para $n > 2$ a média geométrica é simplesmente um nome atrelado à expressão correspondente, carecendo de uma interpretação verdadeiramente geométrica.

4 Sugestões ao professor

O material desta aula deve ser apresentado em pelo menos três encontros de 50 minutos cada. É importante que, em um primeiro momento, o professor trate as demonstrações das desigualdades no máximo para os casos $n = 3$ e $n = 4$. As demonstrações no caso $n = 2$, as quais têm as *interpretações geométricas* discutidas nas vídeo-aulas, também deve ser apresentadas. Apesar de as demonstrações serem razoavelmente técnicas, a abstração utilizada nas mesmas ajudará bastante o desenvolvimento cognitivo dos alunos, especialmente daqueles mais interessados. Do ponto de vista pedagógico, esta aula ilumina um aspecto interessante da Matemática, o qual se encontra usualmente ausente das salas de aula: Matemática é tanto (e até mais) *qualitativa* quanto *quantitativa*.

5 Sugestões bibliográficas

[1] A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.
[2] A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Geometria Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.