Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1

Conceitos Geométricos Básicos

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha

Portal da Matemática
OBMEP

1 Conceitos primitivos

As ideias de **ponto**, **reta** e **plano** aparecem naturalmente quando observamos a geometria em nosso cotidiano. Por exemplo, numa partida de futebol, podemos pensar os vinte e dois jogadores em campo como pontos, as linhas que dividem o campo como retas, e o campo de jogo como um plano.

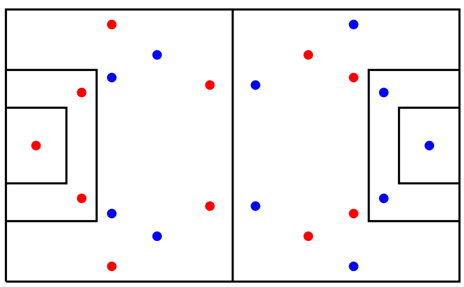

Figura 1: a geometria num campo de futebol.

Matematicamente falando, um **conceito primitivo** é um conceito que não necessita de uma definição formal. Em Geometria, admitimos as noções de ponto, reta e plano como conceitos primitivos. Denotaremos os pontos do plano por letras latinas maiúsculas e as retas por letras latinas minúsculas. Assim é que, na figura 2, A, B e C são pontos, ao passo que r, s e t são retas.

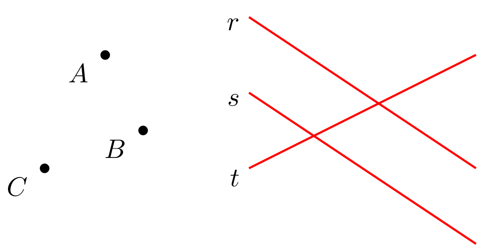

Figura 2: pontos e retas no plano.

Começamos nosso estudo de Geometria examinando as *posições relativas* de dois pontos:

> Dados dois pontos A e B no plano, ou A e B são **coincidentes** (i.e., A e B denotam um mesmo ponto) ou **distintos** (i.e., diferentes). No primeiro caso, escrevemos $A = B$; no segundo, escrevemos $A \neq B$.

A figura 3 ilustra essas duas possibilidades: à esquerda, temos os pontos coincidentes A e B, ao passo que à direita A e B são pontos distintos.

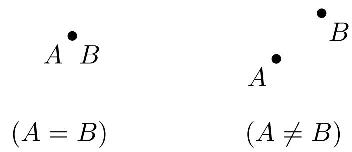

Figura 3: posições relativas de dois pontos.

Em relação a um ponto e uma reta, duas coisas podem acontecer: ou o ponto está sobre a reta, ou não. O quadro abaixo coloca essas duas possibilidades com um pouco mais de detalhe.

> Dados, no plano, um ponto A e uma reta r, ou A **pertence** à reta r, em cujo caso escrevemos $A \in r$, ou A **não pertence** à reta r, em cujo caso escrevemos $A \notin r$.

A figura 4 ilustra os dois casos acima.

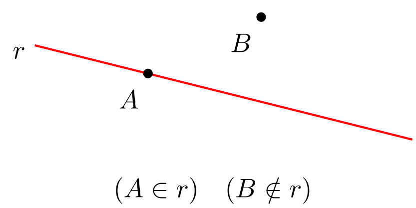

Figura 4: posições relativas de uma reta e um ponto.

Dados dois pontos distintos no plano, nossa experiência com a geometria do dia-a-dia sugere que deve existir uma reta que passa por ambos, e que tal reta deve ser única. Esse é de fato o caso, e tal propriedade é uma das bases para todo o desenvolvimento da Geometria. Por isso, a isolamos no quadro a seguir:

> Dados pontos $A \neq B$ no plano, existe uma única reta r que os contém, e que será denotada, por vezes, por $\overleftrightarrow{AB}$.

A figura 5 mostra a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$, determinada pelos pontos distintos A e B do plano.

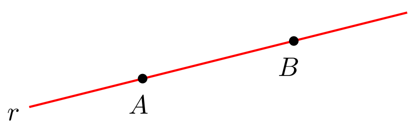

Figura 5: reta determinada pelos pontos A e B.

2 Semirreta e segmento de reta

Dados uma reta r e um ponto $O \in r$, temos que O divide r em dois *pedaços*, conhecidos como as **semirretas** de **origem** O. Se escolhermos pontos A e B em cada uma dessas semirretas, poderemos denotá-las por $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, de tal forma que $\overrightarrow{OA}$ é o pedaço de r que começa em O e contém A, enquanto $\overrightarrow{OB}$ é o pedaço que começa em O e contém B. Veja a figura 6.

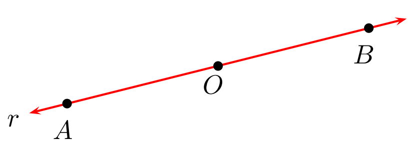

Figura 6: semirretas definidas por $O \in r$.

Dados pontos $A \neq B$, podemos considerar a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que os contém. O **segmento de reta** $\overline{AB}$ é a porção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ delimitada pelos pontos A e B. Em particular, consideramos os pontos A e B como integrantes do segmento AB. Os pontos A e B são as **extremidades** do segmento AB. Na figura 7, marcamos de preto a porção da reta r correspondente ao segmento $\overline{AB}$.

A **medida** ou **comprimento** do segmento de reta $\overline{AB}$ é denotada por AB. Para *comparar* as medidas de dois segmentos dados, podemos proceder conforme descrito a seguir.

Dados dois segmentos de reta, para saber qual deles tem medida maior, ou se os dois têm medidas iguais, basta tomar a medida de um deles utilizando um compasso e comparar com a medida do outro.

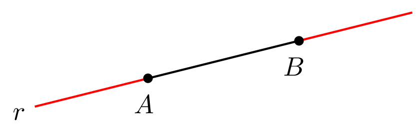

Figura 7: segmento de reta $\overline{AB}$.

Dados, no plano, dois pontos distintos A e B, definimos a **distância** entre eles como a medida do segmento $\overline{AB}$.

O **ponto médio** de um segmento $\overline{AB}$ é o ponto $M \in \overleftrightarrow{AB}$, tal que $AM = MB$. (Veja a figura 8.)

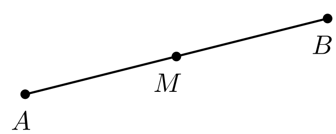

Figura 8: ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

3 Posições relativas de duas retas

Ao analisarmos as possíveis posições relativas de duas retas distintas r e s no plano, observamos duas possibilidades podem ocorrer: ou r e s têm algum ponto em comum, ou r e s não têm pontos em comum.

Se as retas distintas r e s têm algum ponto em comum, afirmamos que elas têm exatamente um ponto em comum. Realmente, se esse não fosse o caso, então r e s teriam pelos menos dois pontos em comum, A e B, digamos. Mas, conforme vimos anteriormente, existe uma única reta passando por dois pontos distintos, de forma que deveríamos ter $r = \overleftrightarrow{AB} = s$. Como esse não é o caso, concluímos que r e s têm exatamente um ponto em comum.

Os dois quadros a seguir destacam as duas posições relativas possíveis de duas retas distintas do plano.

Se as retas r e s não têm pontos em comum, dizemos que elas são retas **paralelas**. Escrevemos $r \parallel s$ para denotar que r e s são paralelas.

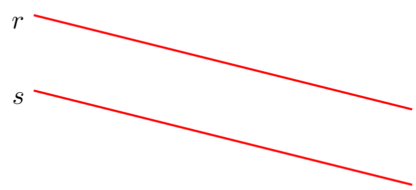

Figura 9: as retas paralelas r e s.

Se as retas r e s possuem um único ponto em comum, digamos $r \cap s = \{A\}$, dizemos que r e s são **concorrentes** em A.

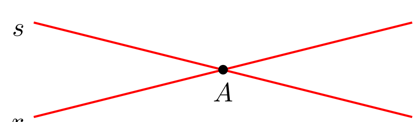

Figura 10: retas r e s, concorrentes em A.

Se r e s não forem necessariamente distintas, há ainda a possibilidade de que sejam *coincidentes*, isto é, que sejam uma mesma reta, denotada de duas maneiras diferentes:

Se as retas r e s têm mais de um ponto em comum, então elas são, necessariamente, iguais. Neste caso, dizemos também que r e s são **coincidentes**, e escrevemos $r = s$.

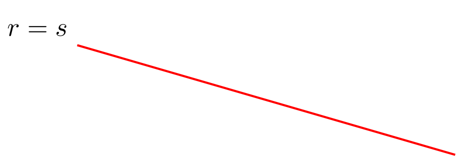

Figura 11: as retas coincidentes r e s.

4 Circunferência e círculo

Dados um segmento $\overline{AB}$, cuja medida é R, e um ponto O no plano, definimos o **círculo** λ (lê-se *lambda*), de **centro** O e **raio** R, como o conjunto formado pelos pontos P do plano, tais que a medida do segmento $\overline{OP}$ é igual à medida do segmento $\overline{AB}$. De outra forma,

$$\lambda = \{P;\ P \text{ é ponto do plano e } OP = R\}.$$

Isso equivale a dizer que o círculo λ, de centro O e raio R é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto O vale R.

A figura 12 esboça o círculo λ, de centro O e raio R. Para traçá-lo marque, com a ajuda de um compasso, a abertura R do segmento AB; em seguida, centre o compasso em O e, mantendo a abertura R, faça o lápis do compasso descrever uma curva em torno de O, a qual é, precisamente, o círculo λ.

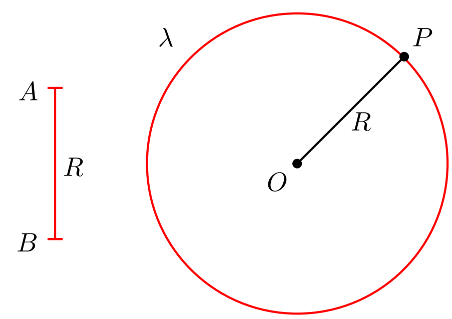

Figura 12: círculo λ, de centro O e raio R.

O **interior** do círculo λ, de centro O e raio R, é o conjunto dos pontos P do plano cuja distância ao centro O é menor do que R. O **exterior** de λ é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a O é maior do que R. A figura 13 mostra o interior e o exterior de λ. O **disco** de centro O e raio R é a reunião do círculo de centro O e raio R com seu interior, ou seja, é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto O é menor ou igual a R.

Uma **corda** do círculo λ é qualquer segmento de reta cujos extremos pertençam a λ. Um **diâmetro** de λ é qualquer corda que contenha o centro O de λ. Observe que a medida de um diâmetro é o dobro do raio do círculo. Na figura 14, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas do círculo desenhado, sendo que $\overline{AB}$ é um diâmetro.

Um diâmetro de um círculo o círculo em duas partes iguais, denominadas os **semicírculos** de diâmetro $\overline{AB}$. Mais geralmente, dois pontos $A \neq B$ sobre um círculo λ determinam dois **arcos** de círculo. Um deles é chamado **arco menor** e o outro **arco maior**, e ambos serão denotados por $\overset{\frown}{AB}$. Caso haja perigo de confusão sobre a qual

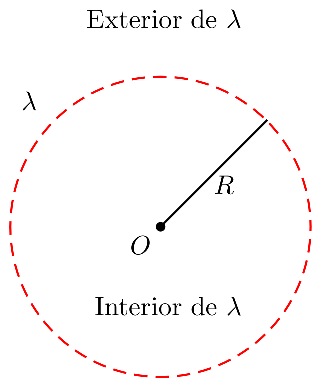

Figura 13: interior e exterior do círculo λ.

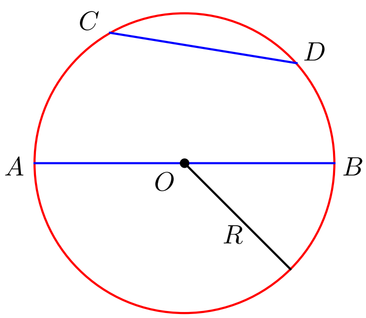

Figura 14: cordas em um círculo.

arco $\overset{\frown}{AB}$ estamos nos referindo, podemos escolher um outro ponto sobre o arco ao qual queremos nos referir. Por exemplo, na figura 15, $A\overset{\frown}{X}B$ denota o arco menor $\overset{\frown}{AB}$ e $A\overset{\frown}{Y}B$ denota o arco maior $\overset{\frown}{AB}$.

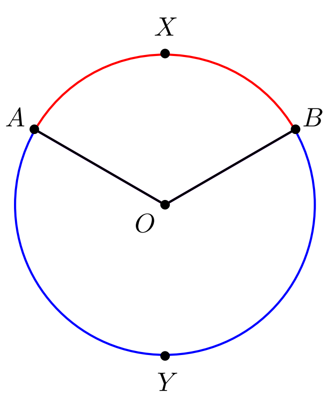

Figura 15: arcos em um círculo.

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para as seções 1 e 2, e outra sessão de 50min para as seções 3 e 4. Ao longo de toda a aula, procure comparar os conceitos geométricos apresentados com objetos da vida cotidiana dos alunos, explicando como situações que nos ocorrem na vida diária podem ser representadas geometricamente. Aproveite para apresentar os alunos à régua e ao compasso, ensinando-os a fazer uso de tais instrumentos, uma vez que eles serão de grande utilidade nas aulas subsequentes.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 2*: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. A. Caminha. *Geometria.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

3. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 9*: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2012.