Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 2

Resolução de Exercícios - Parte B

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

23 de dezembro de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Mais alguns exercícios

Continuamos, o material anterior, discutimos mais alguns exercícios sobre limites, com o intuito de exercitar os conceitos estudados até aqui. Em alguns dos exemplos que apresentaremos, introduziremos informalmente ideias e resultados que serão melhor exploradas em materiais futuros.

Exemplo 1. Para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{tg} x},$$

comecemos montando uma tabela com valores $x \neq 0$ e os valores correspondentes de $F(x)$, em que $F(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{tg} x}$.

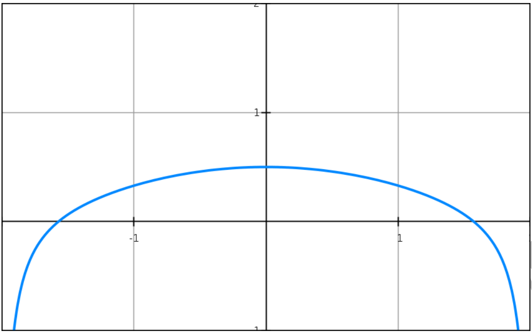
x	$F(x)$
1,8	−0,391
1,5	0,0639
1	0,329
0,5	0,458
0,25	0,489
0,125	0,497

Observando agora que

$$F(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x + \operatorname{tg}(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x - \operatorname{tg} x} = F(x),$$

percebemos que podemos duplicar a lista de valores mostrados na tabela.

Marcando os pontos $(x,F(x))$ da tabela acima, juntamente com seus correspondentes $(-x,F(-x)) = (-x,F(x))$ em um sistema cartesiano e ligando-os por uma curva suave (ainda não temos elementos que permitam saber que essa estratégia é correta, mas veremos mais adiante que ela de fato o é), obtemos algo como mostrado na figura a seguir: Observe que o fato de que $(x,F(x))$ pertence ao gráfico se, e só se, $(-x,F(x))$ também pertence ao gráfico se traduz, geometricamente, pela simetria do gráfico em relação ao eixo das ordenadas. Isto



porque, para todos $x,y \in \mathbb{R}$ os pontos (x,y) e $(-x,y)$ são simétricos em relação a esse eixo.

Evidentemente, $F(0)$ não está definido, pois $\operatorname{sen} x = x + \operatorname{tg} x = 0$ quando $x = 0$. De fato, conforme a discussão a seguir deixará claro, temos que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} (x + \operatorname{tg} x) = 0,$$

de sorte que a dificuldade em calcular o limite pedido vem do fato de que não basta analisar os comportamentos do numerador e do denominador quando $x \to 0$. Por tal razão, dizemos que o limite do enunciado recai em uma **indeterminação do tipo $\mathbf{\frac{0}{0}}$**.

Entretanto, os valores coletados da tabela sugerem que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2},$$

e isto se reflete no esboço do gráfico pelo fato de a curva que o representa não traz interrupção em $x = 0$ (o sistema computacional que a gerou ignora limites...)

A fim de verificar que o limite acima está de fato correto, precisamos de alguns fatos sobre limites que serão estudados em detalhe em materiais futuros.

O primeiro fato é que

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a, \; \forall\; a \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

O segundo é o **limite trigonométrico fundamental**, que afirma que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Os demais são as seguintes *regras operacionais* sobre limites:

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) \tag{2}$$

e

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x), \tag{3}$$

as quais são válidas contanto que os limites dos segundos membros existam, bem como

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} \tag{4}$$

que vale sempre que o limite do segundo membro existir e for não nulo.

Para utilizar tais fatos em nosso caso, comecemos escrevendo

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{tg} x}{x}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}}.$$

Então, uma vez que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1,$$

temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} 1 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}} \\ &= \frac{1}{1 + 1 \cdot 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, observamos que as regras operatórias (2), (3) e (4), apresentadas ao longo da discussão do exemplo anterior, serão utilizadas também nos próximos exemplos.

Exemplo 2. Para calcular

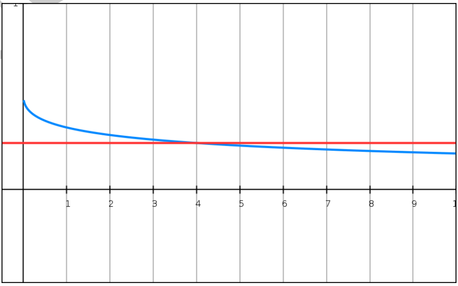
$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4},$$

novamente montamos uma tabela com valores $x \neq 0$ e os valores correspondentes de $f(x)$, em que $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

x	$f(x)$
1	0,333
2	0,292
3	0,267
3,5	0,258
3,75	0,254
3,9	0,251

Ela sugere que, à medida que $x \to 4$ (pelo menos por valores menores que 4), os valores $f(x)$ aproximam-se de $0{,}25 = \frac{1}{4}$.

Tal impressão é reforçada por um esboço do gráfico de f, o qual pode ser obtido marcando, no plano cartesiano, os pontos $(x,f(x))$ obtidos a partir da tabela acima, bem como alguns pontos adicionais que você obtenha com o auxílio de uma calculadora (correspondentes, por exemplo, às abscissas 0, $\frac{1}{2}$, 5, 4,5, 4,3, 4,2, 4,1). O resultado é mostrado a seguir, em azul, sendo a reta vermelha $y = \frac{1}{4}$.



(Assim como ocorreu com o gráfico anterior, nesse caso também não percebemos "salto" algum na linha azul, e isto se deve ao fato de que o sistema computacional embute, no desenho, o limite que estamos calculando.)

A fim de calcular efetivamente o limite, observamos inicialmente que

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

Em seguida, utilizamos (2) e (4) para obter

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)}\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+\lim\limits_{x\to 4}2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+2}.\end{aligned}$$

Por fim, utilizamos o análogo de (1) para a função raiz quadrada: para $a > 0$, tem-se

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

Graças a este fato, podemos completar o cálculo acima:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 3. Desta vez, queremos calcular

$$\lim_{x\to\pi-}\operatorname{ctg} x,$$

e começamos lembrando que $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, contanto que $\operatorname{sen} x \neq 0$.

Uma tabulação de valores para $\operatorname{ctg} x$, com o auxílio de uma calculadora e para valores $x < \pi$ próximos a π, fornece:

x	$f(x)$
2,6415	$-1{,}8304$
2,8915	$-3{,}9163$
3,0415	$-9{,}9666$
3,1315	$-99{,}9966$
3,1405	$-999{,}9996$
3,1414	$-999{,}9999$

A partir daí, fica evidente a suspeita de que

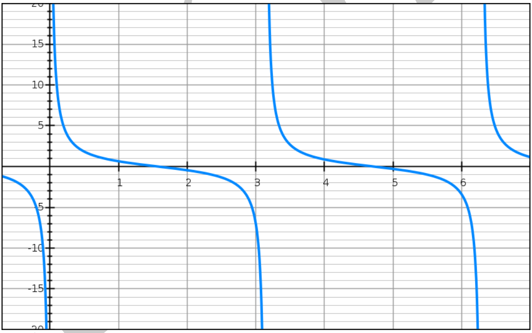
$$\lim_{x\to\pi-} \operatorname{ctg} x = \lim_{x\to\pi-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty,$$

a qual é reforçada pelo fato de que

$$\lim_{x\to\pi-} \cos x = \cos\pi = -1,$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow \operatorname{sen} x > 0 \text{ e } \lim_{x\to\pi-} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\pi = 0.$$

O esboço que usualmente se faz do gráfico da função cotangente também corrobora essa suspeição:



Realmente, a teoria de limites infinitos garantirá que

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = L < 0 \\ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Aplicando tal fato com $f(x) = \cos x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $a = \pi-$, concluímos que, realmente,

$$\lim_{x\to\pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Ainda em relação ao exemplo anterior, como exercício, sugerimos ao leitor verificar que

$$\lim_{x\to\pi-} \csc x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pi-} \sec x = -1.$$

Exemplo 4. Calcule

$$\lim_{x\to 2\pi-} x \cdot \csc x.$$

Recorde que $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, contanto que $\operatorname{sen} x \neq 0$.

Solução. Neste último exemplo, com a experiência ganha nos exemplos anteriores, vamos mostrar que a tabulação de valores para $x \cdot \csc x$ não se faz necessária, a fim de ajudar a intuir o limite desejado.

Começamos observando que, para $\operatorname{sen} x \neq 0$, tem-se

$$x \cdot \csc x = x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{x}{\operatorname{sen} x}.$$

Agora, uma vez que

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{-1},$$

você pode ficar tentado a achar que o limite que desejamos calcular tem a ver com o limite trigonométrico fundamental.

Este não é o caso, pois, naquele limite, tínhamos $x \to 0$, ao passo que, no caso em questão, temos $x \to 2\pi-$. Essa é uma grande diferença, uma vez que

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0,$$

mas

$$\lim_{x\to 2\pi-} x = 2\pi \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2\pi-} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2\pi) = 0.$$

Além disso queremos que x se aproxime de 2π por valores *menores* que 2π. Quando isso acontece, os valores de $\operatorname{sen} x$ serão eventualmente negativos, pois

$$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow \operatorname{sen} x < 0.$$

Podemos juntar as observações acima graças ao fato de que, no desenvolvimento da teoria de limites infinitos, mostraremos que

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = L > 0\\ \lim_{x\to a} g(x) = 0\\ g(x) < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Aplicando esta observação à situação em que $f(x) = x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $a = 2\pi$, concluímos que

$$\lim_{x\to 2\pi-} x \cdot \csc x = \lim_{x\to 2\pi-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = -\infty.$$

□

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em um encontro de 50 minutos, tempo suficiente para abordar os exemplos apresentados. Contudo, caso o professor disponha de mais tempo, achamos instrutivo trazer mais alguns exemplos para discussão em um segundo encontro. Nesse último caso, é interessante reservar um tempo para que os estudantes tentem responder as questões que você proporá, utilizando as questões discutidas no primeiro encontro como modelo e, possivelmente, pequenas sugestões que você dê à medida que perceber algum progresso.

Insista para que aqueles que apresentarem soluções corretas venham à lousa, expô-las aos colegas. Isso é algo que frequentemente faz com que os estudantes não se sintam à vontade, mas é excelente oportunidade para aprenderem a explicar suas ideias aos outros, trazendo benefícios para além da Matemática.

Mais exercícios relacionados a limites finitos e infinitos, laterais ou bilaterais, podem ser encontrados nas sugestões de leitura complementar a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção Profmat. Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2015.

2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol.1. Pearson, São Paulo, 2014.