

# **Material teórico – Óptica Geométrica II**

## **Estudo analítico de espelhos esféricos**

### **Segundo Ano do Ensino Médio**

**Autor: Thales Azevedo**

**Revisor: Lucas Lima**



## 1. Introdução

Vimos anteriormente que as características da imagem formada por um espelho esférico dependem, em geral, da posição do objeto em relação ao vértice do espelho. Por exemplo, se um objeto for posto suficientemente próximo de um espelho côncavo (ou seja, entre o vértice e o foco principal), deduzimos que a imagem formada será virtual, direita e maior que o objeto em questão. Mas qual será exatamente o **tamanho da imagem**? A que **distância do espelho** ela se formará? E será que poderíamos deduzir que a imagem é virtual e direita sem ter que recorrer a uma figura?

Para responder essas perguntas, e assim concluir nosso tratamento dos espelhos esféricos, neste texto vamos fazer um **estudo analítico** sobre tais espelhos. Isso significa que iremos relacionar as propriedades da imagem formada por um dado espelho esférico com aquelas do objeto e do próprio espelho através de expressões algébricas. Neste contexto, o principal resultado é a chamada **equação dos pontos conjugados** ou **equação de Gauss**, que deduziremos para um caso particular, mas que permanece válida para todos os casos possíveis, desde que adotadas convenções de sinal adequadas, definidas pelo chamado **referencial de Gauss**.

Além da equação de Gauss, também é bastante útil a chamada **equação do aumento linear transversal**, que relaciona os tamanhos da imagem e do objeto com suas distâncias ao vértice do espelho, como veremos adiante.

## 2. O referencial de Gauss

Antes de deduzirmos as expressões algébricas que nos permitirão fazer o estudo analítico dos espelhos esféricos, precisamos introduzir um sistema de eixos coordenados em relação ao qual definiremos as posições dos pontos de interesse. Uma escolha bastante conveniente é o chamado referencial de Gauss, que adotaremos neste texto, seguindo a tradição deste campo de estudo.

No referencial de Gauss, o eixo das abscissas (“eixo  $X$ ”) coincide com o eixo principal do espelho, enquanto a origem coincide com o vértice. Por convenção, pontos na frente do espelho possuem coordenadas  $x$  positivas, enquanto pontos atrás do espelho possuem coordenadas  $x$  negativas. Naturalmente, o eixo das ordenadas (“eixo  $Y$ ”) intercepta o eixo  $X$  no vértice, e pontos acima ou abaixo do eixo principal possuem coordenadas  $y$  positivas ou negativas, respectivamente. Tais convenções estão resumidas nas figuras 1 e 2, a seguir.

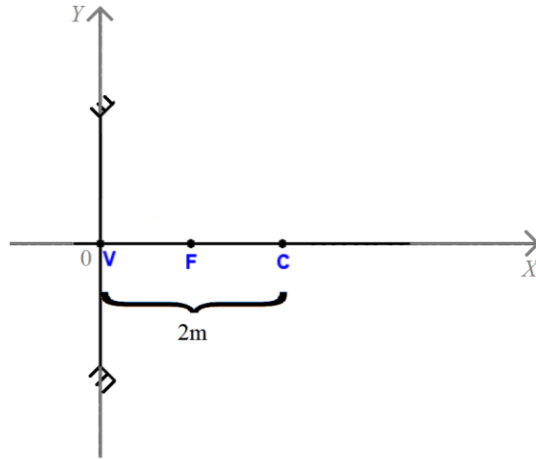


Figura 1: Referencial de Gauss em um espelho côncavo de raio de curvatura igual a  $2\text{ m}$ . Note que as coordenadas do vértice, do foco principal e do centro de curvatura são dadas, respectivamente, por  $\mathbf{V}=(0, 0)$ ,  $\mathbf{F}=(1\text{ m}, 0)$  e  $\mathbf{C}=(2\text{ m}, 0)$ .

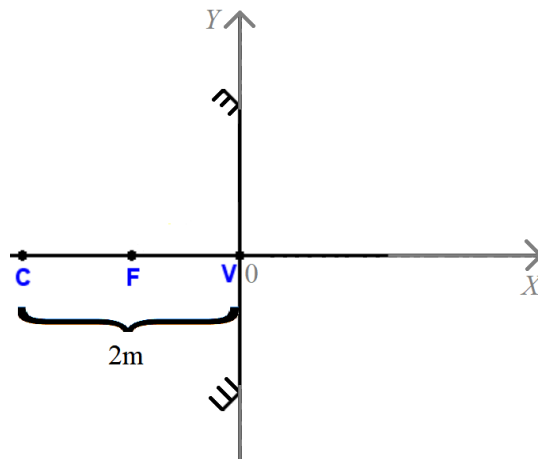


Figura 2: Referencial de Gauss em um espelho convexo de raio de curvatura igual a  $2\text{ m}$ . Note que as coordenadas do vértice, do foco principal e do centro de curvatura são dadas, respectivamente, por  $\mathbf{V}=(0, 0)$ ,  $\mathbf{F}=(-1\text{ m}, 0)$  e  $\mathbf{C}=(-2\text{ m}, 0)$ .

### 3. Dedução da equação de Gauss

Uma vez estabelecidas as nossas convenções, podemos partir para a dedução da equação de Gauss. Para tanto, considere um objeto extenso posicionado de maneira perpendicular ao eixo principal de um espelho côncavo, de frente para o mesmo, a uma distância  $p$  do vértice, como mostra a figura 3. Na figura, estão representados também dois raios particulares emitidos pelo objeto (um que incide no espelho paralelamente ao eixo principal e, portanto, é refletido na direção do foco principal; e outro que, ao

contrário, incide passando pelo foco principal e, portanto, é refletido paralelamente ao eixo principal) e a imagem formada, a uma distância  $p'$  do vértice.

Assim, usando as letras  $o$  e  $i$  para denotar as coordenadas  $y$  das extremidades do objeto e da imagem, respectivamente, temos que a extremidade do objeto pode ser representada pelo ponto O de coordenadas  $(p, o)$ , enquanto a extremidade da imagem pode ser representada pelo ponto I de coordenadas  $(p', i)$ . Em particular, note que, no caso ilustrado na figura,  $i < 0$ , uma vez que se trata de uma imagem invertida.

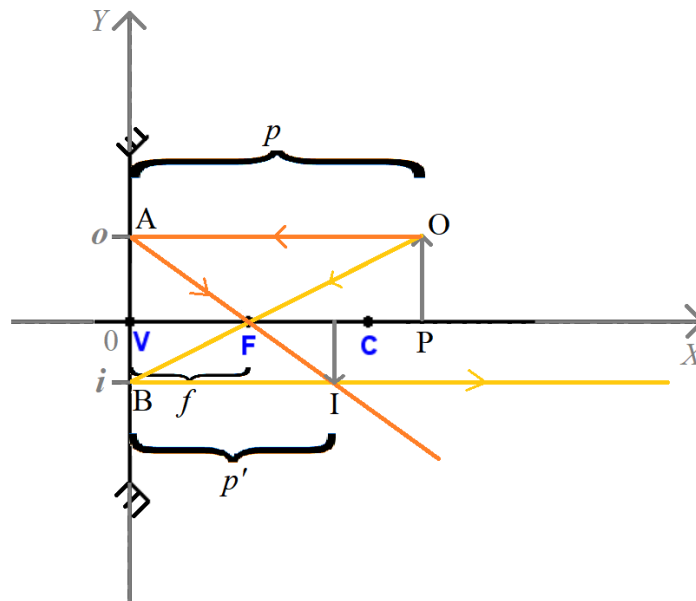


Figura 3: Formação da imagem em um espelho côncavo quando o objeto é colocado a uma distância  $p$  do espelho.

Como um passo intermediário para deduzir a equação de Gauss, podemos introduzir o conceito de *ampliação linear*, denotado pela letra  $A$ , e definido pela seguinte razão entre coordenadas:

$$A = \frac{i}{o}.$$

A ampliação linear permite-nos quantificar a diferença de tamanho entre o objeto e a imagem, além de determinar se essa é invertida ou não em relação àquele. Por exemplo, um  $A = -2$  significa que a imagem tem o dobro do tamanho do objeto e é invertida em relação a ele. Já um  $A = 0,5$  implica uma imagem direita cujo tamanho é metade daquele do objeto.

Também podemos relacionar a ampliação linear com as coordenadas  $p$  e  $p'$ . De fato, a partir da figura 3, podemos ver que os triângulos AOF e BIF são semelhantes. Sendo assim, a razão entre as suas alturas tem que ser igual à razão entre as suas bases. A altura do triângulo AOF é igual à coordenada  $o$ , mas perceba que a altura do triângulo BIF é, na verdade, dada por  $-i$ , pois  $i$  é um número negativo! Logo, a semelhança de triângulos implica

$$\frac{-i}{o} = \frac{p'}{p},$$

ou seja,

$$A = \frac{i}{o} = \frac{-p'}{p}.$$

Esta é a chamada *equação do aumento linear transversal*.

Vejamos, agora, os triângulos FOP e FBV. Como esses triângulos também são semelhantes, vale a mesma relação entre bases e alturas que acabamos de usar. Nesse caso, temos

$$\frac{FV}{FP} = \frac{BV}{OP}$$
$$\frac{f}{p-f} = \frac{-i}{o}.$$

Mas, pela equação do aumento linear transversal, sabemos que  $\frac{-i}{o} = \frac{p'}{p}$ . Portanto,

$$\frac{f}{p-f} = \frac{p'}{p}$$
$$pf = p'(p-f)$$
$$pf = p'p - p'f$$
$$pf + p'f = p'p$$
$$f = \frac{p'p}{p+p'}.$$

Chegamos, assim, à equação de Gauss, mais comumente apresentada na seguinte forma equivalente (obtida tomando o inverso de ambos os lados na última equação acima):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}.$$

Apesar de termos obtido tal equação a partir de um caso particular, ela de fato permanece válida em todos os casos possíveis e para ambos os tipos de espelho esférico, desde que respeitadas as condições de nitidez de Gauss e as convenções de sinais consistentes com o referencial de Gauss. De fato, é importante enfatizar que, na expressão acima,  $f$ ,  $p$  e  $p'$  são coordenadas, podendo ser positivas ou negativas. Por exemplo, no caso de uma imagem virtual formada em um espelho convexo, tanto a imagem como o foco principal encontram-se atrás do espelho; logo, naquele caso teremos  $p'$  e  $f$  negativos.