

Material Teórico - Módulo de Função Logarítmica

Exercícios e Aplicações

Primeiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

02 de junho de 2019



1 Aplicações de logaritmos

Nesta seção, discutimos brevemente duas aplicações clássicas de logaritmos, quais sejam: o cálculo do pH de uma solução e do montante de uma operação financeira sujeita ao regime de juros compostos.

Exemplo 1. Em Química, pH é uma escala adimensional usada para se medir a acidez, ou basicidade, de uma solução aquosa. O termo pH foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Søren Peter Lauritz Sørensen, quando ele trabalhava no controle de qualidade de cervejas. O pH mede a quantidade de íons de hidrônio, H_3O^+ , em uma substância aquosa. A quantidade de íons de hidrônio em cada litro da substância é $[H^+] \times \text{mol}$, onde $1 \text{ mol} = 6,022 \cdot 10^{23}$ íons. O pH é dado por

$$pH = -\log_{10}[H^+].$$

Um litro de uma solução de água pura, a $25^\circ C$, contém 10^{-7} mol de H^+ , ou seja, $10^{-7} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 6,022 \cdot 10^{16}$ íons de hidrônio. O pH da água, nesse estado, é

$$pH = -\log_{10}[H^+] = -\log_{10}(10^{-7}) = 7.$$

Uma substância é considerada **ácida** se a concentração de íons H^+ (ou seja, íons de hidrônio H_3O^+) for maior do que a da água pura a $25^\circ C$. Caso a concentração de íons H^+ seja menor do que a da água pura a $25^\circ C$, dizemos que a substância é **alcalina**.

Uma substância tem pH igual a 3. Qual a concentração de íons H^+ nessa substância? Ela é ácida ou alcalina?

Solução. Temos: $3 = -\log_{10}[H^+]$, ou seja, $[H^+] = 10^{-3}$. Assim, em um litro dessa substância há $[H^+] \times \text{mol} = 6,022 \cdot 10^{20}$ íons de hidrônio. Logo, nessa substância, a concentração de íons de hidrônio é $10^4 = 10000$ vezes maior do que na água pura a $25^\circ C$. Isso significa que a substância é ácida.

Em geral, uma substância é ácida, se seu pH for menor do que 7, e alcalina, se seu pH for maior do que 7. \square

Observação 2. Em um indivíduo normal, o pH do suco gástrico, presente no estômago, varia entre 1,5 e 3. Algumas pessoas têm suco gástrico com pH ainda mais baixo, o que pode provocar gastrites e úlceras no estômago. O $pH = 2$ corresponde a $[H^+] = 10^{-2} = 10^5 \cdot 10^{-7}$, ou seja, no estômago de uma pessoa normal, há uma concentração de íons de hidrônio 100000 vezes maior do que a da água pura a $25^\circ C$.

Exemplo 3. A concentração de íons de hidrônio no estômago de um urubu (*Coragyps atratus*) é cerca de 1000 vezes maior do que a do suco gástrico no estômago de um ser humano. Assumindo que o pH do suco gástrico humano é 3, estime o pH no estômago de um urubu.

Solução. Seja $[H^+]$ a concentração de íons de hidrônio no estômago de um ser humano. Estamos supondo que $-\log_{10}[H^+] = 3$. Segundo o enunciado do problema, o pH do estômago de um urubu é dado por

$$\begin{aligned} pH &= -\log_{10}(1000[H^+]) = -\log_{10}(1000) - \log_{10}[H^+] = \\ &= -\log_{10}(10^3) - \log_{10}[H^+] = -3 - \log_{10}[H^+] = -3 + 3 = 0. \end{aligned}$$

Assim, o pH no estômago de um urubu é próximo a zero! Isso é um dos fatores que explicam a enorme resistência dos urubus a infecções bacterianas. Apesar de comerem carne podre, as bactérias não resistem ao ambiente incrivelmente ácido de seus estômagos. \square

Exemplo 4. Uma aplicação financeira tem um rendimento de 0,5% ao mês. Depois de quantos meses uma quantia investida a essa taxa será duplicada?

Solução. Seja C_0 o capital inicial investido. Depois de um mês, o capital terá um acréscimo de $0,005 \cdot C_0$, logo, o capital, após 1 mês de investimento, será de $C_1 = 1,005 \cdot C_0$. No segundo mês, esse capital será acrescido de $0,005 \cdot C_1$, ou seja, será de $1,005 \cdot C_1 = (1,005)^2 \cdot C_0$. Repetindo esse argumento mais algumas vezes, nos convencemos facilmente de que, após n meses, o capital resultante da aplicação será de $(1,005)^n \cdot C_0$.

Para que o capital inicial seja duplicado, devemos ter

$$(1,005)^n \cdot C_0 = 2C_0,$$

ou seja, $(1,005)^n = 2$. Logo,

$$n = \log_{1,005} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10}(1,005)}.$$

(A última igualdade resulta da mudança do logaritmo para a base 10.) Uma vez que $\log_{10}(1,005) \cong 0,00217$ e $\log_{10} 2 \cong 0,30103$, temos que

$$n = \log_{1,005} 2 \cong \frac{0,30103}{0,00217} \cong 138,72$$

Assim, o capital será duplicado após 11 anos e meio, aproximadamente. \square

2 A espiral logarítmica

Nesta seção, iremos apresentar uma curva chamada **espiral equiangular** ou **espiral logarítmica**. Esta curva foi extensivamente estudada por vários matemáticos dos séculos XVII e XVIII, sobretudo pelo suíço Jakob Bernoulli (1655–1705), que a chamou de *spira mirabilis* (espiral maravilhosa), devido às suas propriedades notáveis.

Considere a seguinte construção: comece traçando n semirretas a partir de um ponto O , cada uma delas formando com as vizinhas ângulos de $360^\circ/n = 2\pi/n$ rad. Na Figura 1, temos 36 semirretas e o ângulo entre duas semirretas consecutivas é $10^\circ = 2\pi/36$ rad.

Agora, escolha um ponto A em uma qualquer das semirretas e, a partir dele, trace um segmento perpendicular à semirreta seguinte, obtendo um segundo ponto B . A partir desse segundo ponto, trace uma perpendicular à semirreta seguinte, e assim sucessivamente, obtendo uma sequência de pontos como a mostrada na Figura 1.

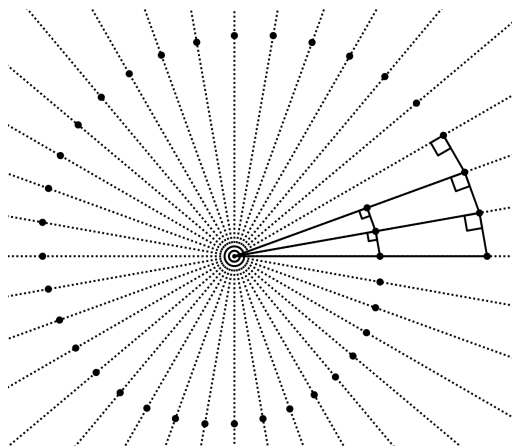


Figura 1: pontos pertencentes a uma espiral logarítmica.

Sejam A , B e C os três pontos consecutivos e A' , B' e C' os três pontos marcados sobre as mesmas semirretas na segunda volta da espiral (veja a Figura 2). Os triângulos OAB e OBC são semelhantes. Logo, $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC}$, ou seja, para cada três pontos consecutivos, os segmentos OA , OB e OC estão em progressão geométrica.

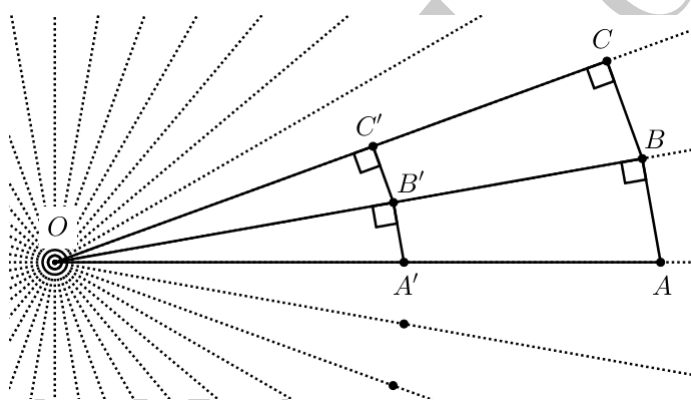


Figura 2: triângulos semelhantes formados pelos raios de uma espiral.

Os pontos A' , B' e C' fazem parte da mesma sequência de pontos, logo, os segmentos OA , OB' e OC' fazem parte da mesma progressão geométrica. Fixando $OA = r_0$, temos que $OB = r_0q$, $OC = r_0q^2$, etc., ou seja, a distância r

do ponto P marcado sobre uma das semirretas até o ponto O é dada por

$$r = OP = r_0 \cdot q^k,$$

onde $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ é a medida do ângulo $\angle AOP$.

Se $\theta = 2\pi \cdot \frac{k}{n}$ for um múltiplo racional de 2π , então podemos escolher $2\pi/n$ como unidade de medida, de modo que $k = \theta$ em relação a essa unidade de medida e

$$r = r_0 \cdot q^\theta.$$

Se θ for um número real qualquer, então existe um número racional $\frac{k}{n}$, arbitrariamente próximo de θ . Escolhendo $2\pi/n$ como unidade de medida, temos que

$$r = r_0 \cdot q^k \simeq r_0 \cdot q^\theta,$$

com o grau de precisão arbitrariamente grande. Dessa forma, fazendo n aumentar, obtemos pontos cada vez mais próximos uns dos outros.

A curva que passa por todos esses pontos é chamada **espiral equiangular** ou **espiral logarítmica**. Se P é um ponto sobre essa curva, então a distância de P até o ponto O depende da medida θ do ângulo $\angle AOP$, segundo a equação:

$$r = r_0 \cdot q^\theta. \quad (1)$$

Podemos escrever $q^\theta = e^{a\theta}$, onde $a = \ln q$ (logaritmo de q na base e). Fazendo isso, a equação (1) toma a forma

$$r = r_0 \cdot e^{a\theta}. \quad (2)$$

Exemplo 5. Uma espiral logarítmica passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(2, 2)$. Calcule os valores das constantes r_0 e a na equação (2) para que a equação represente essa espiral.

Solução. Como o ponto $(3, 0)$ está sobre o eixo das abscissas, o ângulo correspondente é $\theta = 0$. Neste caso, a equação (2) fornece diretamente o valor de r_0 : $3 = r = r_0 \cdot e^{a \cdot 0} = r_0$, ou seja, $r_0 = 3$.

O ponto $(2, 2)$ está localizado na semirreta que é bissetriz do primeiro quadrante. Logo, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Assim,

$$2\sqrt{2} = 3 \cdot e^{a \cdot \frac{\pi}{4}}.$$

Dessa igualdade, obtemos o valor de a :

$$e^{a \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow a \cdot \frac{\pi}{4} = \ln \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right).$$

Portanto, $a = \frac{4}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$ □

O nome *espiral equiangular* se deve à seguinte propriedade notável desta curva:

Seja P um ponto sobre a espiral. O ângulo entre o “raio” OP e a reta tangente à espiral em P não muda quando P se move sobre a curva.

A fim de justificar essa propriedade, consideremos os pontos P , Q e R sobre a espiral, de modo que os ângulos POQ e QOR tenham uma mesma medida α (veja a Figura 3).

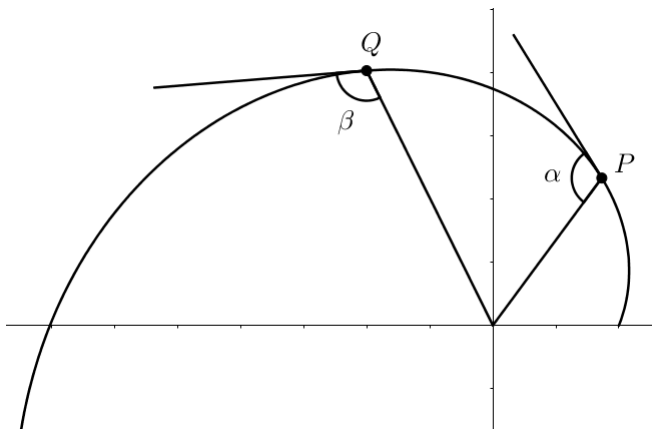


Figura 3: os ângulos α e β , entre raios e retas tangentes, são iguais.

Então, temos $OP = r_0 \cdot e^{a\theta}$, $OQ = r_0 \cdot e^{a(\theta+\alpha)} = r_0 \cdot e^{a\theta} \cdot e^{a\alpha} = OP \cdot e^{a\alpha}$ e $OR = r_0 \cdot e^{a(\theta+2\alpha)} = OP \cdot (e^{a\alpha})^2$. Assim, OP , OQ e OR estão em progressão geométrica, ou seja,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{OR},$$

e disso resulta que os triângulos OPQ e OQR são semelhantes.

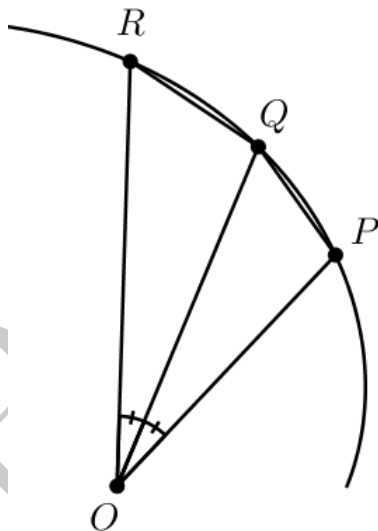


Figura 4: os triângulos OPQ e OQR são semelhantes.

Em particular, os ângulos OPQ e OQR têm a mesma medida. Quando Q se aproxima de P , o ângulo OPQ se aproxima do ângulo entre o raio OP e a reta tangente à espiral em P . Como a mesma construção pode ser repetida para qualquer outro ponto na espiral, com os mesmos ângulos “centrais” $\alpha \rightarrow 0$, podemos concluir que o ângulo entre o raio e a reta tangente é o mesmo em qualquer ponto da espiral.

Exemplo 6. Encontre a equação cartesiana da espiral logarítmica.

Solução. Usando as definições de seno e de cosseno no triângulo retângulo da Figura 5, obtemos as coordenadas cartesianas de um ponto P pertencente à espiral:

$$x = r_0 e^{a\theta} \cos \theta, \quad y = r_0 e^{a\theta} \sin \theta.$$

Elevando ao quadrado e somando, obtemos:

$$x^2 + y^2 = r_0^2 e^{2a\theta} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r_0^2 e^{2a\theta}.$$

Assim,

$$2a\theta = \ln \left(\frac{x^2 + y^2}{r_0^2} \right).$$

Como $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$, podemos escrever $\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$.

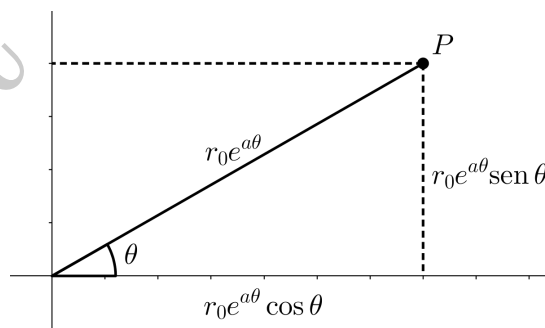


Figura 5: as coordenadas cartesianas de um ponto sobre a espiral logarítmica.

Portanto, a equação cartesiana da espiral logarítmica é

$$2a \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = \ln \left(\frac{x^2 + y^2}{r_0^2} \right).$$

□

Outra propriedade interessante da espiral logarítmica foi descoberta pelo físico italiano Evangelista Torricelli (1608–1647): se um ponto P percorre a espiral logarítmica, a partir de uma posição inicial P_0 , para dentro, de modo

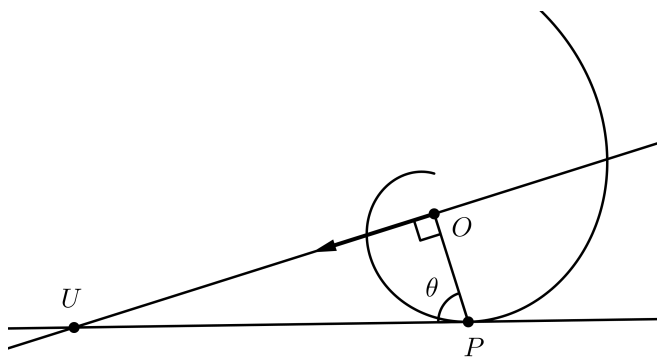


Figura 6: a espiral gira sobre a reta PU , sem deslizar.

a se aproximar do ponto central O , então ele necessariamente vai dar um número infinito de voltas (cada vez mais estreitas) em torno de O , mas a distância percorrida será finita!

Para justificar essa afirmação, imagine que a espiral gira, sem deslizar, sobre uma reta PU (Figura 6). Desse modo, a reta PU é sempre tangente à curva e, como já vimos, o ângulo que PU faz com OP tem sempre a mesma medida, digamos θ . Em cada instante, o ponto P é *centro de rotação*, o que implica que a direção em que o ponto O vai se movimentar é, em cada instante, perpendicular ao “raio” PO . Com isso, concluímos que, quando a espiral gira, o ponto O segue em linha reta na direção da reta OU .

Portanto, ao continuar girando, a espiral vai se “desenrolando” sobre o segmento PU , de modo que o comprimento da espiral do ponto inicial P_0 até o centro O é igual a $\overline{OP_0} \cdot \sec \theta$.

Dicas para o Professor

Nesta aula, você vai encontrar mais alguns exemplos de aplicações da noção de logaritmo. Tais exemplos podem ser cobertos em um ou dois encontros de 50 minutos, dependendo do nível de desenvoltura dos alunos com o tema.

A seção 2 é dedicada à apresentação da *espiral logarítmica*, objeto geométrico fascinante, e que se manifesta de modo recorrente na Natureza: nas conchas de alguns moluscos, como o *Nautilus*, ou no formato das galáxias espirais. As sugestões de leitura complementar 1 e 2, trazem mais informações sobre essa curva.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. Maor, *e: a história de um número*. Rio de Janeiro, Record, 2003.
2. H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*. New York, Dover, 1999.