# Material Teórico - Círculo Trigonométrico

## Seno, cosseno e tangente.

## Primeiro Ano do Ensino Médio

**Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**20 de outubro de 2018**



PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

# 1 Seno, cosseno e tangente

Na aula passada, vimos que se $A = (1{,}0)$ e $P$ é um ponto qualquer sobre o círculo trigonométrico, ou seja, o círculo de raio 1 e centro $O = (0{,}0)$, então a abscissa e a ordenada de $P$ são, nessa ordem, o cosseno e o seno do ângulo $\angle AOP$. Em símbolos, se $\alpha$ é a medida do ângulo $\angle APO$ em radianos, ou seja, o comprimento do arco $\widehat{AP}$, então

$$P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha). \tag{1}$$

De fato, usamos isso para definir os valores de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ de um número real $\alpha$ qualquer: para encontrar $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ basta percorrer (partindo do ponto $A$) um arco de comprimento $|\alpha|$ sobre o círculo trigonométrico, no sentido anti-horário quando $\alpha > 0$ e horário quando $\alpha < 0$, marcar o ponto $P$ e encontrar suas coordenadas. Dessa forma, podemos ver seno e cosseno como funções com domínio igual ao conjunto de todos os números reais. (Lembre-se de que estamos medindo arcos em radianos.)

**Exemplo 1.** *Calcule* $\operatorname{sen}(0)$, $\cos(0)$, $\operatorname{sen}(\pi/2)$ *e* $\cos(\pi/2)$.

**Solução.** Considere $A = (1{,}0)$, $P$ como em (1) e seja $\alpha = \widehat{AP}$. Quando $\alpha = 0$, o ponto $P$ coincide com $A$ (o arco percorrido tem comprimento zero, logo, não saímos do ponto $A$). Assim, $P = (1{,}0)$ e, lembrando que a abcissa representa o cosseno de $\alpha$ e a ordenada representa o seno, temos:

$$\operatorname{sen}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \cos(0) = 1.$$

Por outro lado, quando $\alpha = \pi/2$, como o círculo possui comprimento $2\pi$, teremos percorrido $1/4$ do círculo. Dessa forma, estaremos parados no ponto $P = (0{,}1)$, de sorte que

$$\operatorname{sen}(\pi/2) = 1 \quad \text{e} \quad \cos(\pi/2) = 0. \qquad \square$$

No Módulo "*Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares*" do nono ano do EF, aprendemos como calcular os valores de seno, cosseno e tangente dos arcos equivalentes a 30°, 45°, 60°. Juntamente com os valores obtidos no exemplo anterior, e lembrando que $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$ só está definida quando $\cos\alpha \neq 0$, agrupamos os valores na seguinte tabela.

| Ângulo (graus) | Ângulo (radianos) | sen | cos | tg |
|---|---|---|---|---|
| 0° | $0$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ | $\nexists$ |

Lembremos que quando $\alpha$ e $\beta$ são ângulos congruentes, ou seja, $\alpha - \beta = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, eles determinam um mesmo ponto $P$ sobre o círculo trigonométrico. Dessa forma, temos que:

$$\alpha = \beta + 2k\pi \implies \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta, \\ \cos\alpha = \cos\beta. \end{cases}$$

Assim, vamos no concentrar inicialmente em calcular senos e cossenos de arcos de 0 a $2\pi$.

**Exemplo 2.** *Como observado na aula passada, boa parte das calculadoras científicas trabalham com radianos por padrão. Assim, se digitarmos* 60 *numa calculadora e teclarmos* "SEN", *é possível que o resultado obtido não seja o seno de* 60°, *mas sim o seno de* 60 rad *(é provável que a calculadora tenha uma tecla para definir o* modo de operação, "RAD" *ou* "DEG", *então é necessário ficar atento). Suponha que a calculadora está no modo* "RAD". *O que representa o valor obtido?*

*Vamos calcular, como na aula passada, a menor determinação positiva de* 60 *radianos. Dividindo* 60 *por* $2\pi$ *obtemos, aproximadamente,* 9,549. *Assim, o arco entre* 0 *e* $2\pi$ *congruente a* 60 *tem comprimento* $60 + (-9)\cdot 2\pi$, *que vale aproximadamente* 3,451. *Isso é um pouco maior do que* $\pi$, *logo, está no quadrante III. Fazendo esse experimento, na calculadora, obtemos*

$$\operatorname{sen}(60) = \operatorname{sen}(60 - 18\pi) \cong \operatorname{sen}(3{,}451) \cong -0{,}304.$$

*Isso faz sentido, uma vez no quadrante III o seno é negativo. Por outro lado, veja que*

$$\operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866.$$

Neste texto, sempre que omitirmos a unidade, é porque estamos usando radianos.

**Exemplo 3.** *Para todo arco* $\alpha$, *vale que*

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) \quad e \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha).$$

**Solução.** Suponha que, partindo de $(1{,}0)$ e percorrendo um arco de medida $\alpha$, paramos no ponto $P = (x{,}y)$, de forma que $\operatorname{sen}(\alpha) = y$ e $\cos(\alpha) = x$. Perceba que percorrer o arco $-\alpha$ significa percorrer $\alpha$ no sentido oposto. Ao fazermos isso, pararemos no ponto $P'$, simétrico de $P$ em relação ao eixo-$x$. Dessa forma, $P' = (x, -y)$, e temos que $\cos(-\alpha) = x = \cos(\alpha)$ e $\operatorname{sen}(-\alpha) = -y = -\operatorname{sen}(\alpha)$. $\square$

# 2 Redução ao primeiro quadrante

Para qualquer ângulo $\alpha$ do primeiro quadrante, ou seja, $0 < \alpha < \pi/2$, existe um triângulo retângulo que possui $\alpha$ como um de seus ângulos. As medidas dos catetos e da hipotenusa de um tal triângulo podem ser usadas para calcular o seno, cosseno e tangente de $\alpha$.

Por outro lado, para outros valores de $\alpha$ isso não é possível (já que a soma das medidas dos dois ângulos não retos de um triângulo retângulo é $\pi/2$), mas podemos comparar os valores do seno, cosseno e tangente de $\alpha$ com aqueles de um ângulo $\beta$, este entre 0 e $\pi/2$.

Para entendermos como fazer isso, seja $P$ o ponto do círculo trigonométrico associado ao arco $\alpha$, seja $B$ o pé da perpendicular traçada de $P$ ao eixo-$x$ e $O = (0{,}0)$. Consideremos o triângulo retângulo $BPO$, de hipotenusa $OP$ (de medida 1) – veja as figuras 1a, 1b e 1c, para $\alpha$ nos quadrantes II, III e IV respectivamente, onde $\alpha = \widehat{AP}$ está marcado em verde. Seja, ainda, $\beta = \angle POB$.

Como $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, o fato de $BPO$ ser retângulo de hipotenusa 1 garante que, para $\alpha$ em qualquer quadrante, vale:

$$\overline{BO} = |\cos\alpha| = \cos\beta > 0, \tag{2}$$

$$\overline{BP} = |\operatorname{sen}\alpha| = \operatorname{sen}\beta > 0. \tag{3}$$

Contudo, a relação entre $\alpha$ e $\beta$, assim como os sinais de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$, variam de um quadrante para outro (lembre-se de que estudamos os sinais em cada quadrante na aula passada).

- **$\alpha$ no quadrante II:** pela Figura 1a, temos $\beta = \pi - \alpha$, $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$. Assim, as equações (2) e (3) fornecem

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha),$$
$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha).$$

- **$\alpha$ no quadrante III:** pela Figura 1b que $\beta = \alpha - \pi$, $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$. Assim, pelas equações (2) e (3), vem

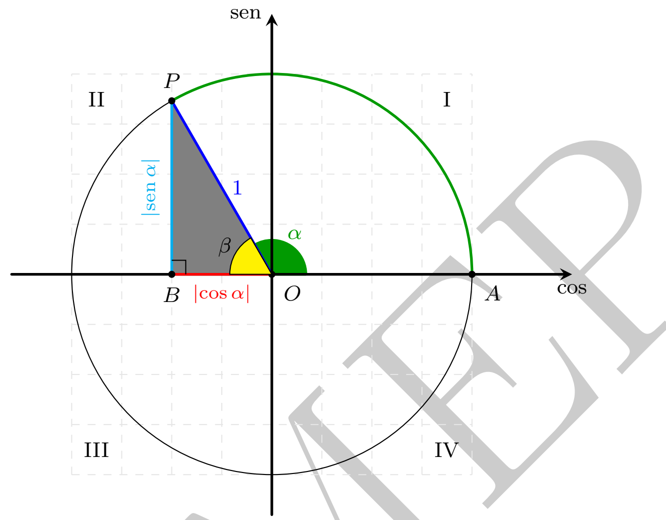
$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - \pi),$$
$$\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi).$$

- **$\alpha$ no quadrante IV:** pela Figura 1c, temos $\beta = 2\pi - \alpha$, $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$. Assim, segue das equações (2) e (3) que

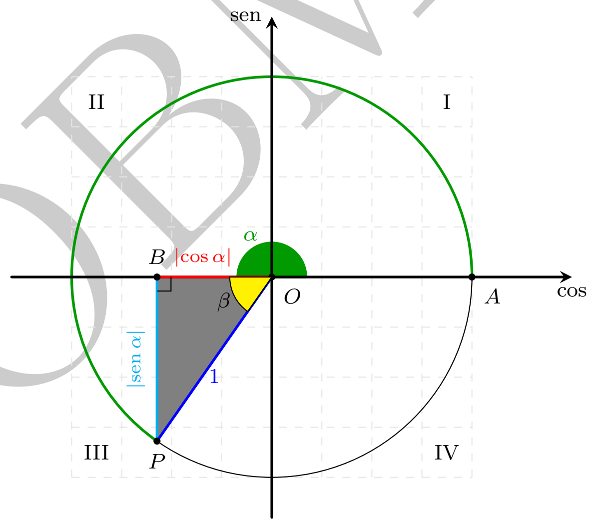
$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi - \alpha),$$
$$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha).$$

**Observação 4.** *É possível demonstrar que as relações acima, por exemplo,* $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$*, valem para todo* $\alpha$*, não apenas para o quadrante indicado. Contudo, a separação em casos por quadrante tem o intuito que garantir que* $\beta$ *seja um ângulo entre* 0 *e* $\pi/2$*.*

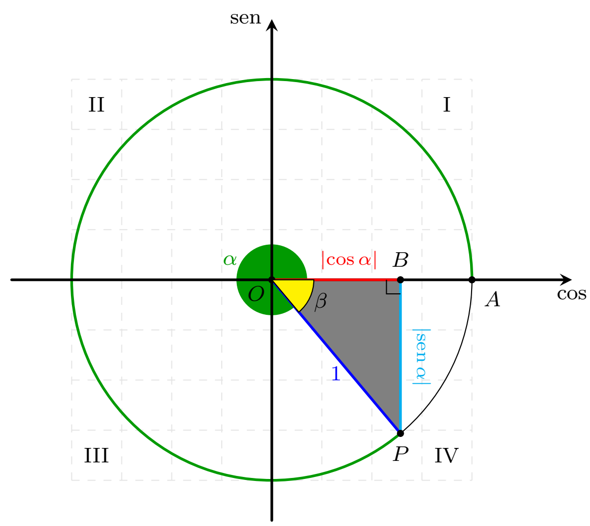
**Exemplo 5.** *Calcule o seno e o cosseno de cada um dos seguintes arcos.*



(a) seno e cosseno no segundo quadrante.



(b) seno e cosseno no terceiro quadrante.



(c) seno e cosseno no quarto quadrante.

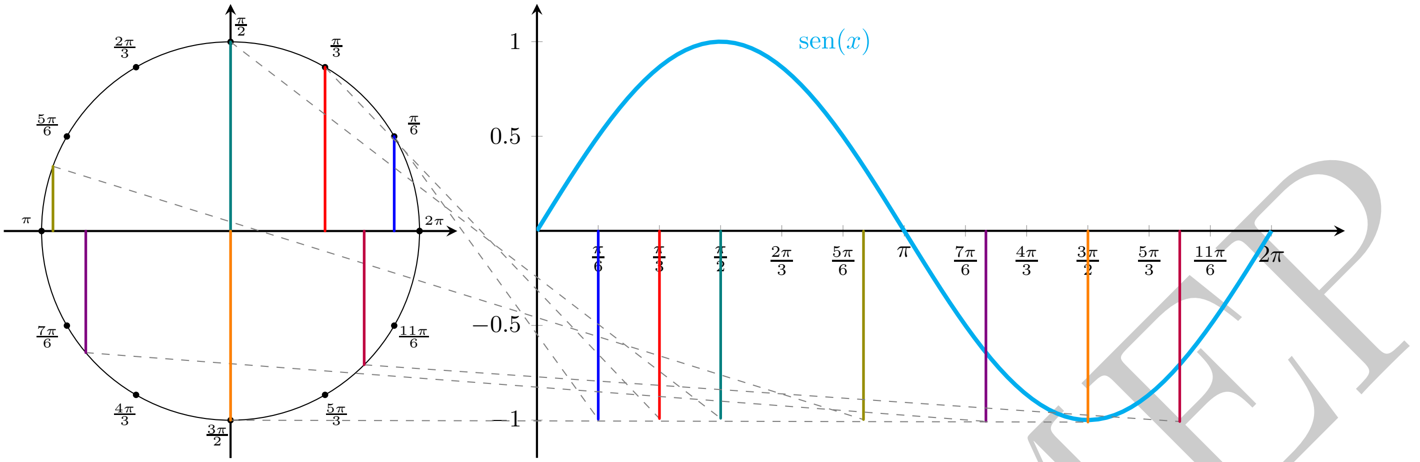



Figura 2: gráfico da função $\text{sen}(x)$ quando $x$ varia de 0 a $2\pi$, com alguns pontos marcados e seus correspondentes no círculo trigonométrico.

*(a)* $2\pi/3$.

*(b)* $5\pi/4$.

*(c)* $11\pi/6$.

**Solução.**
(a) Seja $\alpha = 2\pi/3$. Veja que $\alpha$ está no segundo quadrante. Observando a Figura 1a, temos $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$, e $\beta = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$ é o ângulo que satisfaz (2) e (3). Logo,

$$\text{sen}(2\pi/3) = \text{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos(2\pi/3) = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

(b) Para $\alpha = 5\pi/4$, note que $\alpha$ está no terceiro quadrante. Observando a Figura 1b, temos $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$, e $\beta = 5\pi/4 - \pi = \pi/4$ é o ângulo que satisfaz (2) e (3). Assim, temos

$$\text{sen}(5\pi/4) = -\text{sen}(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos(5\pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(c) Sendo $\alpha = 11\pi/6$, temos $\alpha$ no quarto quadrante. Observando a Figura 1c, vemos que $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$, e $\beta = 2\pi - 11\pi/6 = \pi/6$ é o ângulo que satisfaz (2) e (3). Dessa vez, temos que

$$\text{sen}(11\pi/6) = -\text{sen}(\pi/6) = -\frac{1}{2},$$
$$\cos(11\pi/6) = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ □

Como isso, para qualquer número real $\alpha$ de 0 a $2\pi$, podemos calcular $\text{sen}(\alpha)$. A Figura 2 nos mostra como desenhar o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$, quando $x$ varia de 0 a $2\pi$: do lado esquerdo temos uma cópia do círculo trigonométrico com alguns pontos marcados; do lado direito temos o gráfico desejado. Para obtê-lo, veja que cada ponto sobre o eixo horizontal do gráfico representa a medida de um arco (em radianos). Selecionamos alguns valores de arcos para ilustrar, marcamos os pontos correspondentes no círculo, observamos que a altura de cada ponto marcado corresponde ao seno do arco e marcamos a mesma altura no gráfico. Sobre isso, veja também a animação no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circle__cos__sin.gif.

Observe que entre 0 e $\pi/2$ o valor de seno aumenta até atingir seu valor máximo, igual a 1. De $\pi/2$ até $\pi$ ele diminui até chegar a zero. De $\pi$ a $3\pi/2$ continua diminuindo até chegar a seu valor mínimo, igual a $-1$. Por fim, de $3\pi/2$ a $2\pi$ ele volta a aumentar, até chegar novamente a zero. Neste momento, completamos uma volta inteira no circulo, de forma que o gráfico da função passa a se repetir. Do mesmo modo, para valores negativos de $x$ o padrão mantido é o mesmo. Isso é mostrado na curva em azul da Figura 3, que representa o gráfico de $\text{sen}(x)$ quando $x$ varia de $-10$ até 10.

Por sua vez, a curva em vermelho da Figura 3 é o gráfico de $\cos(x)$. Como podemos perceber isso? Considerando um triângulo retângulo qualquer, se um de seus ângulos não retos tiver medida $\alpha$, o outro terá medida $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Como o cateto adjacente a $\alpha$ é o cateto oposto a $\beta$, temos que $\cos\alpha = \text{sen}\,\beta$. Logo,

$$\boxed{\cos(\alpha) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).} \tag{4}$$

Apesar de que a argumentação acima só funciona para $0 < \alpha < \pi/2$, é possível provar que a equação (4) também é valida para qualquer $\alpha$ real. Deixamos como exercício analisar o que acontece quando $\alpha$ pertence a cada um dos

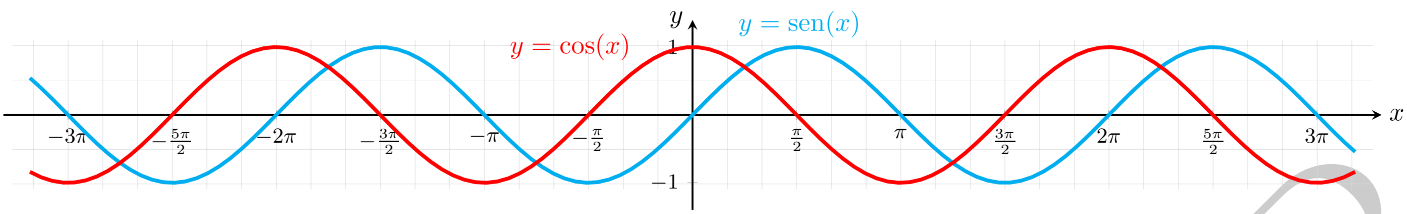



Figura 3: gráficos de seno e cosseno de $-10$ a $10$.

outros quadrantes.

Dessa forma, o gráfico da função $\cos(x)$ nada mais é do que uma translação do gráfico da função $\operatorname{sen}(x)$, e é dessa forma que a curva vermelha da Figura 3 pode ser obtida a partir da curva azul.

# 3 Tangente

Como já sabemos, a tangente de um ângulo $\alpha$ pode ser definida como a razão entre o seno e o cosseno deste ângulo, desde que o cosseno seja diferente de zero. Também é possível visualizar a tangente usando o círculo trigonométrico.

Como antes, considere $A = (1{,}0)$ e seja $P$ um ponto qualquer sobre o círculo trigonométrico; também como antes, seja $B$ o pé da perpendicular traçada de $P$ ao eixo-$x$. Agora, tracemos a reta perpendicular ao eixo-$x$ passado pelo ponto $A$ (veja que, como essa reta é perpendicular ao raio $OA$, ela é tangente ao círculo trigonométrico), e chamemos de $C$ o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{PO}$ com tal reta. Veja que a abcissa do ponto $C$ é igual a 1. Vamos mostrar que sua ordenada é igual a $\operatorname{tg}(\alpha)$. Primeiramente, mostremos que o comprimento do segmento $\overline{AC}$ é igual ao valor absoluto de tangente de $\alpha$, ou seja, $\overline{AC} = |\operatorname{tg}(a)|$.

Na Figura 4, consideramos o caso em que $\alpha$ está no primeiro quadrante, mas não é difícil verificar que o mesmo vale para os demais quadrantes. Veja que os triângulos $AOC$ e $BOP$ são semelhantes, pois ambos são triângulos retângulos e possuem o ângulo $\alpha$ em comum. Então, temos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BO}}.$$

Substituindo $\overline{AO} = 1$, $\overline{BP} = |\operatorname{sen}\alpha|$ e $\overline{BO} = |\cos\alpha|$ na igualdade acima, temos que

$$\overline{AC} = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{|\cos\alpha|} = \left|\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right| = |\operatorname{tg}\alpha|\,.$$

Por fim, veja também que quando o ponto $C$ está acima do ponto $A$ é porque $P$ está no quadrante I ou III; neste caso, temos que $\operatorname{tg}(\alpha)$ é positiva, pois $\operatorname{sen}(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ possuem o mesmo sinal. Da mesma forma, quando $C$ está abaixo de $A$, temos $\operatorname{tg}(\alpha)$ é negativa, pois $P$ está no quadrante II ou IV. Por conta disso, chamaremos a

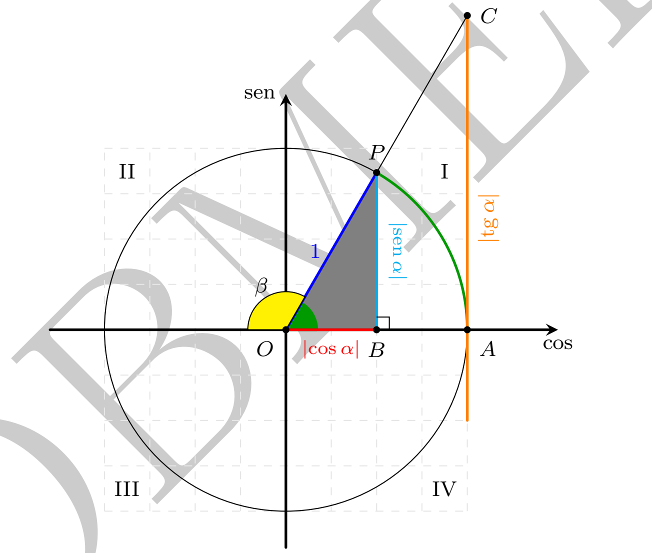



Figura 4: eixo das tangentes.

reta que contém o segmento $AC$ de eixo das tangentes. Note que, quando $\alpha = \pi/2$, o valor de $\operatorname{tg}(\alpha)$ não está definido. Isso segue tanto porque a reta que passa por $(0{,}0)$ e $(0{,}1)$ (este último ponto correspondendo a $P$ quando $\alpha = \pi/2$) não intersecta o eixo das tangentes, quanto porque $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$ mas $\cos(\pi/2) = 0$, de sorte que não podemos realizar uma divisão por zero. De forma geral, sempre que $\cos(\alpha) = 0$ o valor de $\operatorname{tg}(\alpha)$ não está definido. Isso acontece precisamente quando $\alpha = \pi/2 + k\pi$ onde $k$ é um número inteiro: quando $k$ é par temos um arco congruente a $\pi/2$ e quando $k$ é ímpar temos um arco congruente a $3\pi/2$.

Com as observações acima, podemos construir o gráfico da função $\operatorname{tg}(x)$ (veja a Figura 5). Para cada número real $x$, consideremos $\alpha = x$ e observamos o que acontece com o ponto $C$ sobre o eixo das tangentes.

Dessa vez, vamos começar com $x$ sendo um número negativo um pouco maior que $-\pi/2$ (veja que quando $x = -\pi/2$ o valor de $\operatorname{tg}(x)$ não está definido). Neste caso, o ponto $C$ estará muito abaixo de $A$, de modo que $\operatorname{tg}(x)$ será um número negativo de grande valor absoluto. À medida que $x$ aumenta de $-\pi/2$ até $\pi/2$, o valor de $\operatorname{tg}(x)$ só aumenta,

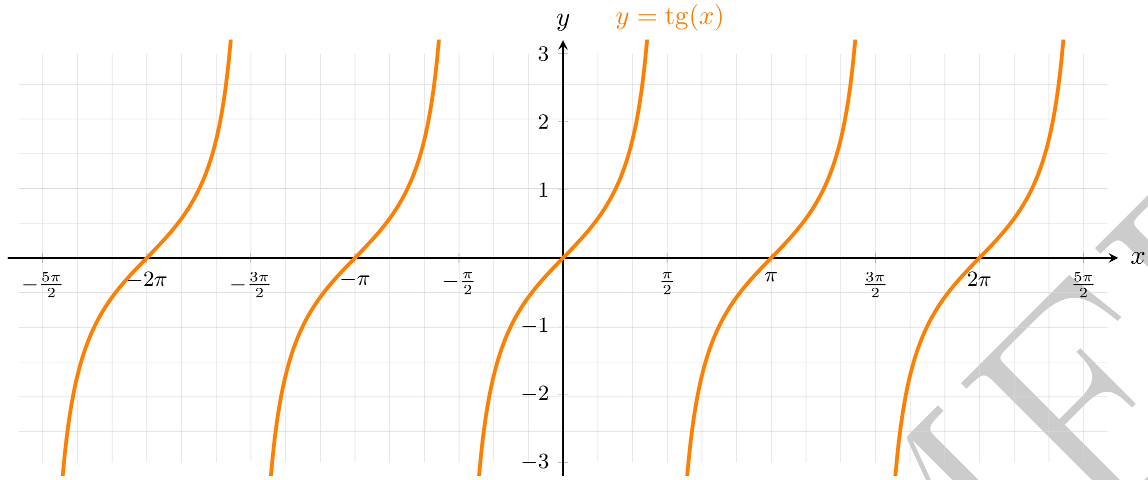



Figura 5: gráfico da tangente no intervalo de $-5\pi/2$ a $5\pi/2$.

passado por 0 quando $x = 0$ e crescendo indefinidamente quando $x$ se aproxima de $\pi/2$. Porém, quando $x = \pi/2$ o valor de $\mathrm{tg}(x)$ novamente não está definido. Repentinamente, para $x$ um pouco maior que $\pi/2$, o valor de $\mathrm{tg}(x)$ volta a ser negativo e grande em módulo e o processo se repete, sempre em intervalos de comprimento $\pi$.

## Dicas para o Professor

Nesta aula, estendemos as noções de seno, cosseno e tangente de arcos entre 0 e $\pi/2$ para arcos em geral. Mostramos ainda como são os gráficos de cada uma dessas funções. É importante que os alunos estejam confortáveis com o conteúdo da aula anterior e, em especial, estejam habituados a usar medidas de arcos em radianos. Outro pré-requisito geral desta aula é ter boa familiaridade com o sistema cartesiano e saber (genericamente) esboçar e interpretar gráficos de funções.

As referências colecionadas abaixo contém mais sobre *funções trigonométricas*.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.