Material Teórico - Módulo Métodos de Contagem e Probabilidade

O Princípio da Casa dos Pombos - Parte 1

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de Janeiro de 2024

Portal da Matemática
OBMEP

1 Argumentando "no pior caso"

Neste material e no próximo você aprenderá uma estratégia de demonstração específica pra problemas que, aparentemente, colocam situações *paradoxais*[1]: por um lado, os dados do problema envolvem escolhas *aleatórias*[2]; por outro, a conclusão é mostrar que algo específico, *determinístico*[3] sempre ocorre.

Esses problemas têm a ver com o enunciado da seção: geralmente, quando nos deparamos com eles, tendemos a pensar no *pior caso* como um caso em que os dados sejam *igualmente distribuídos*. Vejamos um exemplo para entender melhor sobre a que estamos nos referindo.

Exemplo 1. *A sala de aula de João tem* 32 *alunos. Mostre que ao menos dois desses* 32 *alunos farão aniversário em dias (possivelmente de meses diferentes mas) de mesmo número.*

Ao nos depararmos com esse problema, tendemos a raciocinar da seguinte maneira: *como os meses têm no máximo* 31 *dias, no pior caso teremos um aluno aniversariando em um dia de cada número, mas ainda sobrará um aluno. Então, esse aluno aniversariará num dia com o mesmo número daquele em que outro aluno aniversaria.*

Esse argumento é importante como *rascunho*, pela seguinte razão: toda vez que você perceber que está raciocinando dessa maneira (*no pior caso* ...), é um forte sinal de que, provavelmente, a estratégia adequada a ser utilizada para redigir uma solução correta pode vir a utilizar o *Princípio da Casa dos Pombos*. Apresentaremos esse princípio logo mais, mas, para lhe dar uma ideia de como ele funciona, vamos primeiro criticar a "*solução*" acima.

O problema com o argumento de pensar nos aniversários como distribuídos igualmente nos dias de 1 a 30 é que isso pode não acontecer. Evidentemente, você pode estar pensando: "*ora, se os aniversários não forem distribuídos igual-*

[1] *Paradoxal* é mesmo que contraditório.
[2] Uma escolha é *aleatória* se for feita *sem viés*, isto é, *às cegas*.
[3] *Determinístico* é o antônimo de aleatório.

mente, então já teremos dois alunos aniversariando num dia de mesmo número ..." Bem, perceba que é exatamente isso que queremos justificar (isto é, demonstrar), de forma que, ao pensar dessa maneira, você, de fato, estará *raciocinando em círculos*, quer dizer, estará utilizando o que se quer provar para provar o que se quer provar.

Como então, contornar essa situação? Uma solução correta poderia ser a que segue.

Prova do exemplo. Distribua os alunos em 31 salas, numeradas de 1 a 31, colocando cada aluno na sala correspondente ao número do dia de seu aniversário. Como há mais alunos do que salas, existe (pelo menos) uma sala que conterá (no mínimo) dois alunos. Por sua vez, esses dois alunos aniversariam em dias de mesmo número. □

Observe que a demonstração apresentada acima tem a virtude de *mudar o foco da equidistribuição*, dos alunos para os números dos dias. Esse tipo de argumento é muito importante, porque pode ser adaptado a um sem-número de situações. Conforme veremos ao longo dos exemplos que discutiremos, muitas dessas situações são até surpeendentes; outras, impossíveis de serem abordadas por outros métodos.

Por isso, é muito útil dispormos de uma *versão geral* do argumento apresentado acima. Essa versão geral é conhecida como o **Princípio da Casa dos Pombos** (abreviaremos **PCP**) ou **Princípio das Gavetas** ou, ainda, **Princípio de Dirichlet** (por ter sido formulada pela primeira vez pelo matemático alemão do século XIX Gustav Lejeune Dirichlet).

Proposição 2 (PCP). *Se pelo menos $n + 1$ pombos forem distribuídos em n gaiolas (as "casas de pombos"), então pelo menos uma gaiola conterá no mínimo dois pombos.*

Prova. Argumentando por *contraposição* (veja o módulo *Introdução à Lógica Matemática*), basta observar que, se cada gaiola uma das $n - 1$ gaiolas contivesse no máximo 1 pombo, então teríamos, ao todo, não mais do que $n - 1$ pombos. □

A seguir, colecionamos mais alguns problemas envolvendo o Princípio da Casa dos Pombos, a fim de que você se familiarize com sua aplicação.

Exemplo 3. *Mostre que, ao escolhermos $n+1$ números do conjunto $\{1,2,3,\ldots,3n\}$, necessariamente escolheremos dois números cuja diferença, em valor absoluto, é no máximo 2.*

Prova. Novamente aqui, é tentador pensar da seguinte forma: no pior caso, escolheremos n números como 3, 6, 9, ..., $3n$, e ainda sobrará um número a ser escolhido; esse número, necessariamente, distará no máximo 2 de um dos n números já escolhidos.

Conforme comentamos anteriormente, esse argumento não forma uma prova válida, mas sugere tentarmos utilizar o Princípio da Casa dos Pombos. Para fazer isso, as casas de pombos podem ser os n conjuntos

$$\{1,2,3\},\{4,5,6\},\ldots,\{3n-2,3n-1,3n\}.$$

e os pombos podem ser os $n+1$ números escolhidos.

Como há mais pombos do que casas de pombos, o Princípio da Casa dos Pombos garante que (ao menos) uma das casas de pombos, digamos $\{3k-2,3k-1,3k\}$, conterá (no mínimo) dois pombos, digamos x e y. Por fim,

$$x,y\in\{3k-2,3k-1,3k\}\Rightarrow|x-y|\leq 2.$$

□

Exemplo 4. *Do conjunto $\{1,2,3,\ldots,4n-1,4n\}$, escolhemos $n+1$ números ao acaso. Prove que, independentemente da maneira pela qual isso for feito, sempre existirão dois dos números escolhidos cuja diferença, em valor absoluto, é no máximo 3.*

(Sugestão: adapte a demonstração do exemplo anterior a esse caso.)

No próximo exemplo, note que já não é muito simples pensar no "*pior caso*".

Exemplo 5. *Cinco pontos são marcados sobre os lados ou no interior de um quadrado de lado 2. Mostre que, independentemente da maneira pela qual isso for feito, sempre haverá dois desses cinco pontos cuja distância um do outro é no máximo* $\sqrt{2}$.

Prova. Começamos observando que $\sqrt{2}$ não é um número estranho aos quadrados: o Teorema de Pitágoras garante que, se um quadrado tem lados de comprimento ℓ, então suas diagonais medem $\ell\sqrt{2}$. Em particular, $\sqrt{2}$ é o comprimento das diagonais de um quadrado de lado 1.

Também vale a pena observar que o comprimento das diagonais de um quadrado é a maior distância entre dois pontos situados sobre os lados ou no interior do mesmo (veja a figura a seguir):

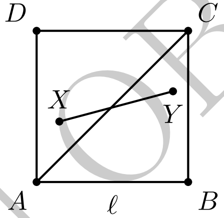

Figura 1: $XY \leq AC = \ell\sqrt{2}$.

A discussão acima nos dá uma saída para o problema: basta garantir que (pelo menos) dois dos cinco pontos estão situados sobre os lados ou no interior de um quadrado de lado 1.

Ora, como sabemos que eles estão situados em um quadrado de lado 2, basta dividir esse quadrado em quatro quadrados de lado 1 e invocar o Princípio da Casa dos Pombos (acompanhe o argumento com a próxima figura): olhando os cinco pontos dados como os pombos e esses quatro quadrados (os quadrados Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4), como as casas dos pombos, o PCP garante que pelo menos dois dos cinco pontos, digamos X e Y, estarão em um mesmo quadrado de lado

1, digamos Q_1. Então, conforme vimos acima, $XY \leq \sqrt{2}$.

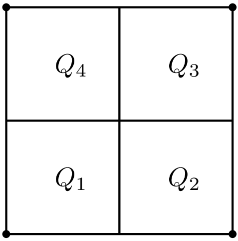

Figura 2: $X, Y \in Q_1 \Rightarrow XY \leq \sqrt{2}$.

$\square$

Exemplo 6. *Marcamos dez pontos no interior ou sobre os lados de um triângulo equilátero de lado* 1*. Mostre que é sempre possível encontrar dois desses dez pontos tais que a distância entre ambos é no máximo* $\frac{1}{3}$*.*

(Sugestão: novamente, evite começar argumentando "*no pior caso ...*". Para encaixar um argumento que utilize o Princípio da Casa dos Pombos, divida o triângulo equilátero em 9 outros triângulos equiláteros, traçando paralelas a seus lados.)

O próximo exemplo é desconcertante (e bem mais sofisticado que os anteriores). Para seu enunciado e para a demonstração subsequente, sempre suporemos que a relação de conhecer alguém é *simétrica*, isto é, se João conhece Maria, então Maria conhece João, e vice-versa.

Exemplo 7. *Em uma festa há n pessoas. Mostre que sempre podemos achar duas pessoas que conhecem, na festa, uma mesma quantidade de pessoas.*

Prova. Em primeiro lugar, perceba que qualquer uma das n pessoas conhece no mínimo 0 e no máximo $n-1$ pessoas da festa. Dessa forma, há dois casos a considerar:

(a) Cada pessoa conhece pelo menos uma outra na festa: tome $n-1$ salas, numeradas de 1 a $n-1$ e ponha na sala i a(s) pessoa(s) (se houver alguma) que conhece(m) exatamente i outras pessoas na festa. Como temos $n-1$ salas e n pessoas, o Princípio da Casa dos Pombos garante que ao menos uma das salas conterá, no mínimo, 2 pessoas. Essas duas pessoas conhecem, na festa, a mesma quantidade de pessoas.

(b) Existe pelo menos uma pessoa que não conhece nenhuma outra na festa (um penetra!). Então, ninguém conhece todas as outras pessoas na festa, de modo que podemos numerar $n-1$ salas de 0 a $n-2$ e raciocinar como no item (a), ou seja, colocando na sala i a(s) pessoa(s) (se houver alguma) que conhece(m) exatamente i outras pessoas na festa. Como temos $n-1$ salas e n pessoas, novamente o Princípio da Casa dos Pombos garante que ao menos uma das salas conterá, no mínimo, duas pessoas. Também como antes, essas duas pessoas conhecem, na festa, a mesma quantidade de pessoas.

$\square$

Terminamos este material discutindo dois exemplos "olímpicos" que ilustram a versatilidade do PCP. Muitos outros exemplos aparecerão nos próximos dois materiais.

Exemplo 8 (Olimpíada Iraniana). *Temos um conjunto de* 33 *números naturais, com todos os seus fatores primos dentre os primos* 2, 3, 5, 7, 11*. Prove que há dois desses números cujo produto é um quadrado perfeito.*

Prova. Aqui, alguns fatos simples de perceber apontarão uma saída. Primeiramente, um número da forma

$$2^a 3^b 5^c 7^d 11^e$$

é quadrado perfeito exatamente quando a, b, c, d, e forem pares. Por exemplo,

$$2^{10} 3^8 5^4 7^6 11^{12} = (2^5 3^4 5^2 7^3 11^6)^2.$$

Por outro lado, como

$$\underbrace{2^a3^b5^c7^d11^e}_{x} \cdot \underbrace{2^{a'}3^{b'}5^{c'}7^{d'}11^{e'}}_{y} = 2^{a+a'}3^{b+b'}5^{c+c'}7^{d+d'}11^{e+e'},$$

temos que xy é quadrado perfeito se, e só se, as somas $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$, $d+d'$, $e+e'$ forem todos pares.

Agora, para ligar os fatos acima ao Princípio da Casa dos Pombos, veja que uma soma $u+u'$ de naturais é par se, e só se, u e u' *tiverem paridades iguais*, isto é, forem ambos pares ou ambos ímpares.

Quando juntamos essa observação às anteriores, percebemos que a solução do problema reside em garantir que, dentre os 33 números dados, há dois, digamos $2^a3^b5^c7^d11^e$ e $2^{a'}3^{b'}5^{c'}7^{d'}11^{e'}$, tais que as sequências de expoentes (a, b, c, d, e) e (a', b', c', d', e') *são iguais em relação a paridade* (isto é, tais que a e a' têm mesma paridade, b e b' têm mesma paridade, ..., e e e' têm mesma paridade.

Eis onde entra o Princípio da Casa dos Pombos: como há duas paridades possíveis pra um número (par ou ímpar), o Princípio Fundamental da Contagem garante que, para uma sequência (a, b, c, d, e) de expoentes, há $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ sequências distintas em relação a paridade. Escrevendo p para *par* e i para *ímpar*, tais sequências são

$$(p, p, p, p, p), \quad (p, p, p, p, i), \quad (p, p, p, i, p),$$

$$(p, p, p, i, i), \quad (p, p, i, p, p), \quad \ldots \quad (i, i, i, i, i).$$

Ora, temos 33 números, exatamente uma unidade a mais que a quantidade de sequências (a, b, c, d, e) distintas em relação a paridade. Então, podemos montar o seguinte esquema de pombos e casas de pombos:

i. Os pombos são os 33 números dados.

ii. As casas de pombos são as 32 sequências (a, b, c, d, e) distintas em relação a paridade.

Como temos mais pombos do que casas de pombos, o Princípio da Casa dos Pombos garante que ao menos dois números x e y (isto é, ao menos dois pombos), dentre os 33 dados, digamos

$$x = 2^a 3^b 5^c 7^d 11^e \text{ e } y = 2^{a'} 3^{b'} 5^{c'} 7^{d'} 11^{e'},$$

têm sequências (a, b, c, d, e) e (a', b', c', d', e') iguais em relação a paridade (isto é, estão em uma mesma casa de pombos). Mas isso era exatamente o que precisávamos para garantir que xy seja um quadrado perfeito. $\square$

Problema 9 (Teste de Seleção do Brasil para a Cone Sul). *Mostre que, escolhendo aleatoriamente $n+1$ elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 3n\}$, teremos necessariamente escolhido dois números x e y tais que $xy+1$ ou $4xy+1$ é um quadrado perfeito.*

Prova. Esse problema é até mais simples que o anterior, sua primeira parte sendo idêntica à primeira parte do enunciado do exemplo 3. O que o complica é a segunda parte: garantir que dois dos $n+1$ elementos escolhidos, digamos x e y, são tais que $xy+1$ ou $4xy+1$ é um quadrado perfeito. Essa parte dificulta o problema, porque não percebemos como ligá-la à primeira parte. Contudo, é exatamente nisso em que a conclusão do exemplo 3 ajuda.

Pelo resultado daquele exemplo, dois dos $n+1$ números escolhidos, os quais chamaremos x e y, são tais que

$$|x - y| \leq 2.$$

Agora, uma observação importante, que simplifica o que faremos a seguir: *as expressões $xy+1$ e $4xy+1$ são simétricas em relação a x e y*; portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que $y > x$, o que implica

$$0 < y - x \leq 2$$

e dá dois casos:

(a) $y - x = 1$: nesse caso, temos $y = x + 1$, logo,

$$4xy + 1 = 4x(x+1) + 1 = (2x+1)^2$$

(b) $y - x = 2$: aqui, temos $y = x + 2$, logo,

$$xy + 1 = x(x + 2) + 1 = (x + 1)^2.$$

Em resumo, $xy + 1$ ou $4xy + 1$ é quadrado perfeito. □

Uma última observação em relação à demonstração do exemplo anterior é que ela mostra como uma certa *erudição* (isto é, conhecimento adquirido por estudo sistemático) é útil em Matemática (e, em particular, em Olimpíadas de Matemática): quem conhecesse e lembrasse do exemplo 3 teria muito mais facilidade de resolver o exemplo anterior do que alguém que não conhecesse aquele resultado.

Dicas para o Professor

Esse material foi parcialmente baseado na seção 4.1 da referência [1]. Lá, o leitor pode encontrar vários outros exemplos resolvidos e problemas propostos utilizando o Princípio da Casa dos Pombos. O capítulo 7 da referência [2] também pode ser consultado nesse sentido. Nos próximos materiais, veremos alguns desses exemplos adicionais, assim como generalizações muito úteis do PCP.

O conteúdo aqui reunido pode ser apresentado em três sessões de 50 minutos cada. Nesse esquema, reserve a primeira sessão para discorrer sobre o problema de *pensar no pior caso*, debatendo com a turma os porquês dessa estratégia não constituir uma demonstração formal. A próxima sessão pode ser reservada a aplicações menos elaboradas do Princípio da Casa dos Pombos, enquanto a última sessão de 50 minutos pode abordar os dois últimos exemplos acima.

Adicionalmente, sugerimos ao professor enfatizar, junto à sua turma, que o PCP é uma ideia simples, mas de aplicações sofisticadas; por isso, eles não devem desanimar se não entenderem uma parte do material após as sessões em sala, seguida de uma primeira leitura adicional.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM Editora, 2024.

2. J. Plínio de O. Santos et al. *Introdução à Análise Combinatória*, quarta edição. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.