Material Teórico - Módulo Miscelânea

Resolução de Exercícios - Parte 1

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Resolução de exercícios

Nesse material, apresentamos alguns exemplos envolvendo os mais diversos conteúdos abordados até aqui.

Exemplo 1 (OBM). *Uma hora-potência é uma hora cujo formato representa uma potência perfeita de número inteiro com expoente maior que* 1*, ou seja, algo no formato* a^b *em que* a *e* b *são inteiros e* $b > 1$*. Por exemplo,* $03 : 43$ *é uma hora-potência, afinal,* $343 = 7^3$*, mas* $01 : 10$ *não é uma hora-potência, pois* 110 *não é potência exata de número inteiro algum. Também,* $02 : 89$ *não é hora-potência, pois, embora* $289 = 17^2$*, não existe a hora* $02 : 89$ *(já que os minutos vão apenas até* 60*). Quantas horas-potências existem depois de* $00 : 00$ *e antes de* $02 : 59$*?*

Solução. Primeiramente, vamos contar todas as potências perfeitas entre 0 e 259. Iniciamos com os quadrados perfeitos, que são: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$ e $16^2 = 256$. Agora, passamos aos cubos perfeitos, excluindo os que também são quadrados perfeitos e já foram contados antes: $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $5^3 = 125$ e $6^3 = 216$. As quartas potências perfeitas não entram na conta, pois também são quadrados perfeitos e já foram contadas. As demais potências perfeitas que são menores que 259 são: $2^5 = 32$, $3^5 = 243$ e $2^7 = 128$.

Temos, assim, um total de 23 potências perfeitas entre 0 e 259. Mas, observe que $00 : 64$, $00 : 81$, $01 : 69$ e $01 : 96$ não são horas-potências, pois em todos esses casos a quantidade de minutos excede 59. Deste modo, temos um total de $23 - 4 = 19$ horas-potências entre $00 : 00$ e $02 : 59$. □

Exemplo 2. *Quantas vezes o algarismo* 9 *aparece no resultado da operação*

$$10^{100} - 2017?$$

(a) 93.

(b) 94.

(c) 95.

(d) 96.

(e) 97.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} 10^{100} - 2017 &= \left(10^{100} - 1\right) - 2016 \\ &= \underbrace{99\ldots9}_{99 \text{ alg.}} - 2016 \\ &= \underbrace{99\ldots9}_{95 \text{ alg.}}7983. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado da expressão $10^{100} - 2017$ possui $95 + 1 = 96$ algarismos 9. Assim, a alternativa correta é a letra (d). □

Exemplo 3 (Banco OBMEP). *Um numero é dito "enquadrado" quando, ao ser somado com o numero obtido invertendo a ordem de seus algarismos, o resultado é um quadrado perfeito. Por exemplo,* 164 *e* 461 *sao enquadrados, uma vez que* $164 + 461 = 625 = 25^2$*. Quantos são os números enquadrados entre* 10 *e* 100*?*

(a) 5.

(b) 6.

(c) 8.

(d) 9.

(e) 10.

Solução. Se n é um número inteiro entre 10 e 100, podemos escrever $n = ab = 10a + b$, onde a e b são os algarismos de n, das ordens das dezenas e das unidades, respectivamente. Observe que $1 \le a \le 9$ e $0 \le b \le 9$. Invertendo a ordem dos algarismos de n, obtemos o número $m = ba = 10b + a$. Desse modo, n é enquadrado se, e somente se,

$$m + n = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$$

for um quadrado perfeito. Daí, devemos ter

$$a + b = 11q^2,$$

para algum natural q.

Agora, se $q = 1$, então $a + b = 11$; se $q \ge 2$, então $a + b \ge 2^2 \cdot 11 = 44$. Mas, como $a, b \le 9$, temos $a + b \le 18$, de modo que a única possibilidade é $a + b = 11$. Daí, obtemos que os números enquadrados entre 10 e 100 são 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 e 92, ou seja, temos um total de 8 números enquadrados nessas condições. A alternativa correta é, pois, a letra (c). □

Exemplo 4. *Patrícia escreveu, em ordem crescente, os inteiros positivos formados apenas por algarismos ímpares:*

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, \ldots$$

Qual foi o 157^o *número que ela escreveu?*

(a) 997.

(b) 999.

(c) 1111.

(d) 1113.

(e) 1115.

Solução. Há 5 números inteiros positivos formados por apenas um algarismo ímpar. Utilizando o princípio fundamental da contagem, vemos que há $5 \cdot 5 = 25$ números formados por dois algarismos ímpares, pois há 5 modos de se escolher o algarismo das unidades e outros 5 modos de se escolher o algarismo das dezenas. Analogamente, há $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ números formados por três algarismos ímpares, pois neste caso devemos escolher os algarismos das unidades, das dezenas e das centenas. Logo, há $5+25+125 = 155$ números inteiros positivos formados por, no máximo, 3 algarismos ímpares. Portanto, o 156º número da sequência é o menor número inteiro formado por 4 algarismos ímpares, que é 1111 e o seguinte, 1113, é o 157º da lista. □

Exemplo 5 (Banco OBMEP). *Qual o resto da divisão de 2^{2015} por 20? Bom, é difícil fazer esta divisão diretamente usando apenas papel e caneta. Vamos procurar uma maneira de obter tal resposta analisando os restos de potências de 2 por 20, com a esperança de encontrar algum padrão neles. Por exemplo, qual o resto que 2^5 deixa por 20?*

$$2^5 = 32 = 1 \cdot 20 + 12.$$

Sabendo disto, fica fácil saber o resto de 2^6 por 20. De fato, começamos observando que

$$2^6 = 2 \cdot 2^5 = 2 \cdot (1 \cdot 20 + 12) = 2 \cdot 20 + 24;$$

porém, dado que 24 é maior que 20, ele não pode ser um resto, e substituindo $24 = 20 + 4$, obtemos

$$2^6 = 2 \cdot 20 + (20 + 4) = 3 \cdot 20 + 4.$$

Podemos estender o argumento anterior, concluindo que para saber o resto de 2^{i+1} por 20 basta tomar o resto r de 2^i por 20 e calcular o resto de $2r$ por 20. Deste modo, podemos construir a sequência de potências e restos na divisão por 20, como abaixo:

n	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
Resto por 20	2	4	8	16	12	4

(a) Calcule os restos que os números 2^7, 2^{10} e 2^{13} deixam na divisão por 20.

(b) Sabendo que os restos se repetem de forma periódica, calcule o período de repetição, ou seja, o número de restos distintos que ficam se repetindo.

(c) Voltamos à pergunta do começo do problema. Qual o resto que 2^{2015} deixa na divisão por 20?

Solução. (a) Prosseguindo o cálculo dos restos das potências de 2 por 20 conforme indicado, obtemos:

$$2^6 = 3 \cdot 20 + 4 \Longrightarrow 2^7 = 2 \cdot 2^6 = 6 \cdot 20 + 8.$$

Analogamente, temos

$$2^8 = 12 \cdot 20 + 16,$$
$$2^9 = 24 \cdot 20 + 32 = 24 \cdot 20 + 20 + 12 = 25 \cdot 20 + 12,$$
$$2^{10} = 50 \cdot 20 + 24 = 50 \cdot 20 + 20 + 4 = 51 \cdot 20 + 4,$$
$$2^{11} = 102 \cdot 20 + 8,$$
$$2^{12} = 204 \cdot 20 + 16$$

e, finalmente,

$$2^{13} = 408 \cdot 20 + 32 = 408 \cdot 20 + 20 + 12 = 409 \cdot 20 + 12.$$

Logo, os restos procurados são 8, 4 e 12.

(b) Observe que os restos se repetem a cada quatro potências, a partir de 2^2. Desse modo, o período é 4 e os restos que ficam se repetindo são 4, 8, 16 e 12.

(c) Como o período de repetição é 4, basta observar o resto na divisão de 2015 por 4. Como $2015 = 4 \cdot 503 + 3$, obtemos que esse resto é igual a 3. Daí, 2^{2015} deixa o mesmo resto que 2^3 quando dividido por 20, isto é, deixa resto 8 quando dividido por 20.

□

Exemplo 6 (Banco OBMEP).

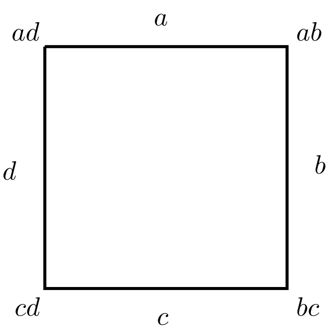
(a) Severina escreveu um número inteiro positivo em cada lado de um quadrado. Em seguida, escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nos lados que se encontram nesse vértice. A soma dos números escritos em dois lados opostos é 60 e a soma dos números escritos nos outros lados é 85. Qual é a soma dos números escritos nos vértices?

(b) Catarina, por sua vez, escreveu em cada face de um cubo um número inteiro positivo. Em seguida, escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nas três faces que se encontram nesse vértice. Se a soma dos números escritos nos vértices é 105, qual é a soma dos números escritos nas faces?

Solução. (a) Suponhamos que Severina escreveu os números a, b, c e d nos lados do quadrado (veja a figura abaixo). Portanto, os números escritos nos vértices são ab, bc, cd, e ad. Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} ab + bc + cd + ad &= b(a + c) + d(a + c) \\ &= (a + c)(b + d) \\ &= 85 \cdot 60 \\ &= 5100. \end{aligned}$$

(b) Suponhamos que os números a, b, c, d, e e f são os inteiros positivos escritos por Catarina nas faces de um cubo, em que os pares (a, b), (c, d) e (e, f) foram escritos

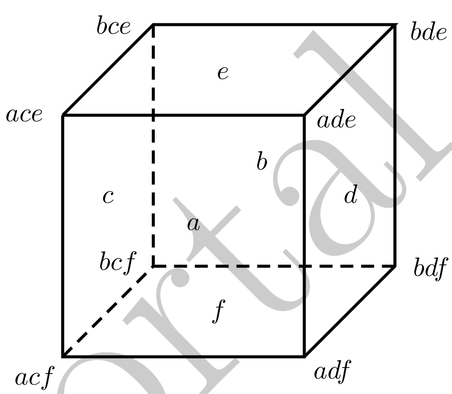


em faces opostas. Portanto, Catarina escreveu nos vértices os números ace, acf, ade, adf, bce, bcf, bde e bdf (veja a figura abaixo). Como, por hipótese, a soma dos números escritos nos vértices vale 105, temos:

$$\begin{aligned}105 &= ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf\\ &= a(ce + cf + de + df) + b(ce + cf + de + df)\\ &= (a + b)(ce + cf + de + df)\\ &= (a + b)\left(c(e + f) + d(e + f)\right)\\ &= (a + b)(c + d)(e + f).\end{aligned}$$

Agora, como os números escritos por Catarina são inteiros positivos e 105 se fatora como $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, obtemos que os números $a + b$, $c + d$ e $e + f$ são iguais a 3, 5 e 7, em alguma ordem. Daí segue que

$$a + b + c + d + e + f = 3 + 5 + 7 = 15.$$



□

Exemplo 7 (Banco OBMEP). *Um número inteiro n é "simpático" quando existem inteiros positivos a, b e c tais que $a < b < c$ e $n = a^2 + b^2 - c^2$. Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$ e $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$.*

(a) Verifique que $(3x+1)^2 + (4x+2)^2 - (5x+2)^2$ é igual a $2x + 1$, qualquer que seja x.

(b) Encontre números inteiros m e n tais que $(3x-m)^2 + (4x-n)^2 - (5x-5)^2 = 2x$, qualquer que seja x.

(c) Mostre que o número 4 é simpático.

(d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.

Solução. (a) Invocando a fórmula para o quadrado da soma de dois termos, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, obtemos:

$$\begin{aligned}&(3x + 1)^2 + (4x + 2)^2 - (5x + 2)^2 =\\ &= (9x^2 + 6x + 1) + (16x^2 + 16x + 4) - (25x^2 + 20x + 4)\\ &= (9 + 16 - 25)x^2 + (6 + 16 - 20)x + (1 + 4 - 4)\\ &= 2x + 1.\end{aligned}$$

(b) Veja que

$$\begin{aligned}&(3x - m)^2 + (4x - n)^2 - (5x - 5)^2 =\\ &= 9x^2 - 6xm + m^2 + 16x^2 - 8xn + n^2 - 25x^2 + 50x - 25\\ &= (9 + 16 - 25)x^2 + (50 - 6m - 8n)x + (m^2 + n^2 - 25)\\ &= (50 - 6m - 8n)x + (m^2 + n^2 - 25).\end{aligned}$$

Desse modo, devemos encontrar inteiros m e n tais que

$$(50 - 6m - 8n)x + (m^2 + n^2 - 25) = 2x,$$

qualquer que seja x. Portanto, para encontrar m e n, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} -6m - 8n + 50 = 2\\ m^2 + n^2 - 25 = 0.\end{cases}$$

É fácil ver que as soluções de $m^2 + n^2 = 25$ com m e n inteiros são

$$(m, n) \in \{(0, \pm 5), (\pm 3, \pm 4), (\pm 4, \pm 3), (\pm 5, 0)\}.$$

Já a segunda equação nos dá:

$$-6m - 8n + 50 = 2 \Longleftrightarrow 3m + 4n = 24.$$

Uma simples verificação mostra que a única solução da equação $m^2 + n^2 = 25$ que satisfaz também a equação $3m + 4n = 24$ é $(m, n) = (4, 3)$, ou seja, $m = 4$ e $n = 3$.

(c) Já sabemos que

$$1 = 4^2 + 7^2 - 8^2.$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por $4 = 2^2$, obtemos:

$$\begin{aligned}4 &= 2^2 \cdot 4^2 + 2^2 \cdot 7^2 - 2^2 \cdot 8^2\\ &= 8^2 + 14^2 - 16^2.\end{aligned}$$

(d) Dado um número inteiro positivo n, temos duas possibilidades:

i. n é ímpar: neste caso, já sabemos que, se $n = 1$, temos que n é simpático. Por outro lado, se $n > 1$, então $n = 2k+1$, em que k é um inteiro positivo. Mas, segue do item (a) que

$$2k + 1 = (3k + 1)^2 + (4k + 2)^2 - (5k + 2)^2.$$

Assim, fazendo $a = 3k + 1$, $b = 4k + 2$ e $c = 5k + 2$, obtemos $n = 2k + 1 = a^2 + b^2 - c^2$, com $a < b < c$, de modo que n é simpático.

ii. n é par: neste caso, já sabemos que 2 e 4 são simpáticos. Então, podemos supor que $n = 2k$, em que k é um inteiro maior do que 2. O item (b) nos dá:

$$2k = (3k - 4)^2 + (4k - 3)^2 - (5k - 5)^2.$$

Fazendo $a = 3k - 4$, $b = 4k - 3$ e $c = 5k - 5$, obtemos $n = a^2 + b^2 - c^2$. Além disso, veja que

$$a = 3k - 4 < 4k - 3 = b \Longleftrightarrow -1 < k$$

e

$$b = 4k - 3 < 5k - 5 = c \Longleftrightarrow 2 < k.$$

Mas, como estamos considerando $k > 2$, temos $a < b < c$, e n é simpático.

$\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadam duas sessões de 50min cada para discutir os exemplos que compõem esse material. Ao expô-los, saliente os conteúdos utilizados e faça uma breve recapitulação.

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume* 1*: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 6*: Complexos, Polinômios Equações.* São Paulo, Atual Editora, 2012.

3. D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg. *Círculos Matemáticos, a Experiência Russa.* Rio de Janeiro, IMPA, 2013.