Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Regra da Cadeia - Introdução

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Dezembro de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Dadas funções deriváveis $f, g : I \to \mathbb{R}$, aprendemos regras em aulas anteriores para derivar $f * g$, caso $*$ represente qualquer uma das operações de adição, subtração, multiplicação ou divisão de funções. Nesta aula, abordaremos a situação em que $*$ é a operação $\circ$ de *composição* de funções, o que conduzirá a um importante resultado envolvendo o cálculo de $(f \circ g)'$, denominado *regra da cadeia*.

Para ter uma ideia do conteúdo dessa regra, digamos que três pessoas, A, B e C, corram numa pista retilínea durante um certo intervalo de tempo I. Se $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ forem as posições de A, B e C em um determinado instante $t \in I$, suas velocidades nesse mesmo instante serão $x'(t), y'(t)$ e $z'(t)$, respectivamente. Como veremos, uma interpretação adequada dos termos da igualdade

$$\frac{z'(t)}{x'(t)} = \frac{z'(t)}{y'(t)} \cdot \frac{y'(t)}{x'(t)} \tag{1}$$

permitirá exemplificar a (fórmula da) regra da cadeia.

Primeiro, observe que para cada posição de A corresponde uma única posição de B, ou seja, y é função de x, digamos $y = g(x)$. Analogamente, z é função de y, $z = f(y)$, e, portanto, z também é função de x por composição, $z = f(g(x))$.

Seja Δt um intervalo de tempo iniciado em um instante t_0, no qual A encontrava-se na posição $x_0 := x(t_0)$. Se, durante tal intervalo, os deslocamentos de A e B foram Δx e Δy, então a taxa de variação média de y em relação a x será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Portanto, notando que $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta t \to 0$, obtemos

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Assim, $y'(t_0)/x'(t_0)$, quantidade que representa quantas vezes B é mais rápido que A no instante t_0, coincide com $g'(x_0)$, a taxa de variação instantânea, em x_0, da posição de B em relação à posição de A. Naturalmente, a mesma conclusão deve valer para os demais pares (B, C) e (A, C), de sorte que, pondo $y_0 := g(x_0)$,

$$f'(y_0) = \frac{z'(t_0)}{y'(t_0)} \quad \text{e} \quad (f \circ g)'(x_0) = \frac{z'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Substituindo essas quantidades em (1), obtemos a igualdade

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0). \tag{2}$$

Essa última relação ilustra a *regra da cadeia*, segundo a qual a derivada da composição $f \circ g$ em um ponto x_0 é o produto das derivadas de f e g nos pontos correspondentes, a saber, $f'(y_0)$ e $g'(x_0)$.

A interpretação cinemática de (2), no contexto considerado acima, é de que a velocidade na qual a posição de C varia em relação à posição de A é o produto da velocidade em que a posição de C muda em relação à posição de B pela velocidade em que a posição de B muda em relação à posição de A. De outro modo, retornando à igualdade (1), essa lei expressa o seguinte fato, intuitivamente óbvio: *se, em um determinado instante, B for a vezes mais rápido que A e C for b vezes mais rápido que B, então, nesse mesmo instante, C será ab vezes mais rápido que A.*

2 A Regra da Cadeia

O enunciado formal da Regra da Cadeia é como segue.

Teorema 1 (*Regra da Cadeia*). *Sejam $g : J \to I$ uma função derivável em $x_0 \in J$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $g(x_0)$. Então, a composição $f \circ g$ é derivável em x_0 e sua derivada nesse ponto é igual $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$, o produto das derivadas de f e g nos pontos correspondentes. Assim,*

$$(f \circ g)'(x_0) = \underbrace{f'(g(x_0))}_{\textit{derivada da função ext.}} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{\textit{derivada da função int.}}. \tag{3}$$

Grosso modo, a regra da cadeia assegura que a *derivada da função composta é a derivada da função externa, calculada na função interna, multiplicada pela derivada da função interna.*

Por exemplo,

$$\frac{d(\cos x^3)}{dx} = (-\operatorname{sen} x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2 \operatorname{sen} x^3$$

para todo x real (aqui, cos é a função externa e $x \mapsto x^3$ a função interna); também,

$$\frac{d(e^{\operatorname{tg} x})}{dx} = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x$$

para cada real $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (dessa feita, a exponencial de base e é a função externa, enquanto tg é a função interna).

Mais geralmente, se f for uma função derivável tal que as composições $x \mapsto f(x^n)$, n inteiro, e $x \mapsto e^{f(x)}$ estejam definidas em certos intervalos, então a regra da cadeia ensina que

$$\frac{d(f(x^n))}{dx} = f'(x^n) \cdot nx^{n-1}$$

e

$$\frac{d(e^{f(x)})}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

para cada x nos respectivos intervalos. Essas duas últimas fórmulas serão utilizadas nos exemplos 8 e 7, respectivamente.

Corolário 2. *A composição $f \circ g$ de funções deriváveis f, g ainda é derivável e*

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'. \tag{4}$$

Exemplo 3. *A derivada da função*

$$x \mapsto \operatorname{cossec}\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right),$$

$x \in (-\infty, 2)$, *pode ser obtida, via regra da cadeia, em três passos:*

1. *Cálculo da derivada da função externa* $f(y) = \operatorname{cossec} y$*:*

$$f'(y) = -\operatorname{cotg} y \cdot \operatorname{cossec} y; \tag{5}$$

2. *Cálculo da derivada da função interna* $g(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$*:*

$$g'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x(2x)}{(x^2+1)^2} = e^x\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2;$$

3. *Substituição de* y *por* $\frac{e^x}{x^2+1}$ *em* (5) *e multiplicação das derivadas obtidas nos passos anteriores:*

$$\frac{d\left(\operatorname{cossec}\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)\right)}{dx} = -\operatorname{cotg}\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)\operatorname{cossec}\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)e^x\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2. \qquad \square$$

No exemplo acima, detalhamos as etapas necessárias ao cálculo da derivada de uma função composta. Conforme avançarmos nos exemplos, tais passos serão resumidos ou omitidos, sempre que não houver prejuízo à compreensão.

É interessante reescrever a regra (4) na notação de Leibniz. Se z é função derivável da variável y, $z = f(y)$, e y é função derivável da variável x, $y = g(x)$, então $z = f(g(x))$ é função derivável da variável x, com

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{6}$$

Perceba que, no 2º membro da relação (6), há uma simplificação notacional digna de nota: dz/dy deve, de acordo com (4), ser entendido como $\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=g(x)}$.

Observação 4. *Ainda que* dz/dx, dz/dy *e* dy/dx *sejam utilizados na fórmula* (6) *apenas como substitutos simbólicos de* $(f \circ g)'(x)$, $f'(y)$ *e* $g'(x)$, *respectivamente* [1], *a vantagem mnemônica é evidente: vista na forma* (6), *a regra da cadeia parece consistir de uma simples manipulação algébrica com infinitesimais, em que, pela multiplicação e divisão por* dy, *transformamos a razão* dz/dx *no produto* $(dz/dy) \cdot (dy/dx)$ [2]*.*

[1] Confira, contudo, a seção *Dicas para o Professor* da aula *Definição*, do módulo *Derivada como Função*.

[2] Vide comentários na seção *Dicas para o Professor*.

Nas notações de Leibniz, a *versão pontual* da regra da cadeia (3) se expressa por

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=g(x_0)} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

3 Exemplos

Um erro comum ao se derivar uma função composta ocorre quando se ignora o 2º fator ("derivada da função interna") no 2º membro da relação (3).

Por exemplo, se m for inteiro e f for derivável, devemos atentar ao fato de que a (função) derivada de $x \mapsto f(x)^m$ *não* é, em geral, $x \mapsto mf(x)^{m-1}$. Nesse caso, pela regra da cadeia, o correto seria escrever

$$\frac{d(f(x)^m)}{dx} = mf(x)^{m-1} \cdot f'(x).$$

Aliás, a regra da cadeia permite estender a fórmula anterior, nas hipóteses adequadas, a expoentes racionais [3]. Com efeito, se $r = m/n$ for um número racional, em que $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, podemos decompor a função $x \mapsto f(x)^r$, para $f > 0$, como a composição de $x \mapsto y = f(x)^m$ com $y \mapsto z = y^{1/n}$. Daí, se f for derivável, valerá[4]

$$\begin{aligned}
\frac{d(f(x)^r)}{dx} &= \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\
&= \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1} \cdot \big(mf(x)^{m-1} \cdot f'(x)\big) \\
&= \frac{m}{n} \cdot \big(f(x)^m\big)^{\frac{1}{n}-1} \cdot f(x)^{m-1} \cdot f'(x) \\
&= \frac{m}{n} \cdot f(x)^{\frac{m}{n}-\cancel{m}+\cancel{m}-1} \cdot f'(x) \\
&= rf(x)^{r-1} f'(x).
\end{aligned}$$

[3] Ou, mais geralmente, expoentes reais, como enunciaremos numa aula posterior.

[4] A regra para calcular a derivada da função raiz n-ésima foi deduzida no corolário 7 da aula *Reta Tangente - Parte 1*, no módulo *Definição de Derivada*.

Acabamos de demonstrar a

Proposição 5. *Seja r um número racional. Se f for uma função derivável e* positiva, *então a regra $x \mapsto f(x)^r$ define uma função derivável, de mesmo domínio que f. Além disso,*

$$\frac{d(f(x)^r)}{dx} = rf(x)^{r-1}f'(x).$$

Exemplo 6. *Calcule as derivadas das funções cujas regras são dadas abaixo, supondo que tais funções estejam definidas em seus domínios maximais.*

a) $f(x) = \sqrt[12]{x} + \sqrt[12]{x^5} + \sqrt[12]{x^7} + \sqrt[12]{x^{11}}$.

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^5) - \operatorname{sen}^5 x$.

c) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x + \sec x)$.

d) $f(x) = \operatorname{cotg}(e^{\sqrt{x}})$.

Solução. Escrevendo $\sqrt[12]{x^m}$ na forma $x^{m/12}$, para $m = 1, 5, 7, 11$, o item a) torna-se uma aplicação direta da proposição anterior: se $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{12} \cdot x^{\frac{1}{12}-1} + \frac{5}{12} \cdot x^{\frac{5}{12}-1} + \frac{7}{12} \cdot x^{\frac{7}{12}-1} + \frac{11}{12} \cdot x^{\frac{11}{12}-1} \\ &= \frac{1}{12x} \cdot x^{\frac{1}{12}} + \frac{5}{12x} \cdot x^{\frac{5}{12}} + \frac{7}{12x} \cdot x^{\frac{7}{12}} + \frac{11}{12x} \cdot x^{\frac{11}{12}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{x} + 5\sqrt[12]{x^5} + 7\sqrt[12]{x^7} + 11\sqrt[12]{x^{11}}}{12x}. \end{aligned}$$

Para o item b), temos, com $y = x^5$,

$$\begin{aligned} \frac{d(\operatorname{sen}(x^5))}{dx} &= \frac{d(\operatorname{sen} y)}{dy} \cdot \frac{d(x^5)}{dx} \\ &= (\cos y) \cdot 5x^4 = 5x^4\cos(x^5). \end{aligned}$$

Tomando, dessa vez, $y = \operatorname{sen} x$, obtemos

$$\frac{d(\operatorname{sen}^5 x)}{dx} = 5\operatorname{sen}^4 x \cdot \cos x,$$

de sorte que

$$f'(x) = 5\big(x^4\cos(x^5) - \operatorname{sen}^4 x\cos x\big).$$

No item c), para $y = \operatorname{tg} x + \sec x$, segue que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d(\ln y)}{dy}\cdot\frac{d(\operatorname{tg} x + \sec x)}{dx}\\ &= \frac{1}{y}\cdot(\sec^2 x + \operatorname{tg} x\cdot\sec x)\\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} x + \sec x}\cdot(\operatorname{tg} x + \sec x)\sec x\\ &= \sec x. \end{aligned}$$

Quanto ao item d), vemos que f é a composição de *três funções*, caso em que faremos uso da regra da cadeia *duas vezes*. Começaremos calculando a derivada de $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$, pondo $y = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{d(e^{\sqrt{x}})}{dx} &= \frac{d(e^y)}{dy}\cdot\frac{d(\sqrt{x})}{dx}\\ &= e^y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}},\ \ x > 0. \end{aligned}$$

Daí, fazendo $z = e^{\sqrt{x}}$, vem que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d(\operatorname{cotg} z)}{dz}\cdot\frac{d(e^{\sqrt{x}})}{dx}\\ &= -\operatorname{cossec}^2 z\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = -\frac{e^{\sqrt{x}}\operatorname{cossec}^2(e^{\sqrt{x}})}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

para cada x positivo. □

Os dois últimos exemplos são mais sofisticados, podendo ser omitidos numa primeira leitura.

Exemplo 7. *Sejam $n > 1$ um número natural fixado e $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função continuamente derivável tal que $f(x^n) = nf(x)$ para todo $x > 0$. Mostre que f, se não for constante, é uma função logarítmica.*

Solução. Derivando a relação dada, obtemos $nx^{n-1}f'(x^n) = nf'(x)$, ou, equivalentemente,

$$x^n f'(x^n) = xf'(x) \text{ para todo } x > 0. \tag{7}$$

Se g é o produto de f' pela função identidade, então g é contínua e, de acordo com (7), $g(x^n) = g(x)$ para todo $x > 0$. Daí, substituindo x por $\sqrt[n]{x}$, vem $g(x) = g(\sqrt[n]{x})$, de onde segue, por indução matemática, a fórmula

$$g(x) = g\left(\sqrt[n^k]{x}\right) \tag{8}$$

para todo natural k e para cada $x > 0$. Uma vez que[5]

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[n^k]{x} = 1$$

se $x > 0$, a relação (8) e a continuidade de g implicam

$$g(x) = \lim_{k\to+\infty} g\left(\sqrt[n^k]{x}\right) = g\left(\lim_{k\to+\infty} \sqrt[n^k]{x}\right) = g(1).$$

Assim, g é constante e tal constante não pode ser nula, já que $g \equiv 0 \Rightarrow f' \equiv 0$, o que, por sua vez, implica f constante, condição proibida por hipótese.

Escrevendo $g(1) = 1/\ln a$, para $a = e^{1/g(1)}$, resulta da relação $f'(x) = g(1)/x$ que

$$\frac{d(f(x))}{dx} = \frac{1}{x\ln a} = \frac{d(\log_a x)}{dx},$$

logo,

$$\frac{d(f(x) - \log_a x)}{dx} \equiv 0.$$

Dessa forma, a função $x \mapsto f(x) - \log_a x$ é constante, o que permite escrever

$$f(x) - \log_a x = f(1) - \log_a 1,$$

isto é, $f(x) = \log_a x + f(1)$.

Por fim, tendo em conta que $f(1) = f(1^n) = nf(1)$, com $n > 1$, concluímos que $f(1) = 0$ e, portanto, $f = \log_a$. $\square$

[5] Confira o exemplo 8 da aula *Teorema do Sanduíche*, no módulo *Leis do Limite - Parte 2.*

Exemplo 8 (Harvard - MIT Mathematics Tournament, 2003). *Duas funções diferenciáveis $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfazem*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = e^{f(x)-g(x)}$$

para todo $x \geq 0$, em que $f(0) = g(2003) = 1$. Encontre a maior constante c tal que $f(2003) > c$ para quaisquer tais funções f, g.

Solução. A relação dada pode ser reescrita como

$$-f'(x)e^{-f(x)} = -g'(x)e^{-g(x)},$$

ou, pela regra da cadeia,

$$\frac{d(e^{-f(x)} - e^{-g(x)})}{dx} = 0.$$

Logo, a função $x \mapsto e^{-f(x)} - e^{-g(x)}$ é constante, isto é,

$$e^{-f(x)} - e^{-g(x)} = e^{-f(0)} - e^{-g(0)}$$

para todo $x \geq 0$. Assim, fazendo $x = 2003$, vem

$$e^{-f(2003)} - e^{-1} = e^{-1} - e^{-g(0)}$$

ou, ainda,

$$e^{-f(2003)} = 2e^{-1} - e^{-g(0)} < 2e^{-1}.$$

Calculando logaritmos naturais, segue que

$$f(2003) > 1 - \ln 2.$$

Afirmamos que $1 - \ln 2$ é o número procurado. De fato, basta mostrar que, caso c' seja um número real tal que $f(2003) > c'$, para toda f como no enunciado, então $c' \leq 1 - \ln 2$.

Observe que se a função g tiver derivada negativa e satisfizer $g(2003) = 1$, então

$$f(x) = -\ln(e^{-g(x)} + e^{-1} - a)$$

define uma função f tal que o par (f, g) cumpre a relação dada no enunciado, desde que $a > 0$ seja escolhido de modo a ter $f(0) = 1$, ou seja, $a = e^{-g(0)}$.

Pondo, para cada natural $n > 1$ e para todo real x,

$$g_n(x) = \frac{1-n}{2003} \cdot x + n,$$

vemos que a função afim g_n tem derivada negativa, $g_n(2003) = 1$ e $g_n(0) = n$. Logo, a função f_n associada a g_n, segundo a regra acima, satisfaz

$$f_n(2003) = -\ln(2e^{-1} - e^{-n}).$$

Portanto, as desigualdades $c' < f_n(2003)$ implicam, pela permanência do sinal,

$$c' \leq \lim_{n \to \infty} f_n(2003) = 1 - \ln 2.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Seguindo o roteiro das videoaulas, apresentaremos a demonstração da regra da cadeia na terceira aula desse módulo.

Em relação à observação 4, vale ressaltar que não dispormos, em nosso curso, de uma teoria para conferir sentido às operações algébricas com infinitesimais, como aquelas sugeridas na versão leibniziana da regra da cadeia (6). Por conseguinte, tais raciocínios ficam reduzidos à mera heurística.

Ainda nesse sentido, o leitor tem liberdade para operar com infinitesimais, desde que seu intuito seja de *conjecturar* fórmulas; para demonstrá-las, haverá de utilizar os métodos desenvolvidos em nossas aulas.

Para exemplificar esse ponto, suponha que, nas notações da igualdade (6), $u = h(z)$ seja uma função derivável da variável z. Então, u será uma função da variável x, $u =$

$h(f(g(x)))$, e, por manipulação formal de infinitesimais, conjecturamos a relação

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{9}$$

Inicialmente, para que o primeiro membro da igualdade acima faça sentido, é necessário que $h \circ f \circ g$ seja derivável. Se o for, a fórmula (9) se traduz como

$$(h \circ f \circ g)' = \big(h' \circ (f \circ g)\big) \cdot \big(f' \circ g\big) \cdot g'.$$

Esses fatos seguem de duas aplicações da regra da cadeia. Realmente, $f \circ g$ é derivável e, portanto, $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$ também o é. Logo,

$$\begin{aligned}(h \circ f \circ g)' &= \big(h \circ (f \circ g)\big)' \\ &= \big(h' \circ (f \circ g)\big) \cdot (f \circ g)' \\ &= \big(h' \circ (f \circ g)\big) \cdot \big(f' \circ g\big) \cdot g',\end{aligned}$$

como queríamos.

A exemplo do que ocorre em geral, o emprego correto e eficiente da regra da cadeia pressupõe *treino*. Isso posto, sugerimos ao leitor os exercícios das seções 3.3 de [1], 7.11 de [2] e do capítulo 10 de [3].

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

3. M. Spivak. *Calculus*. 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.