Material Teórico - Módulo Trigonometria II

Transformações de soma em produto

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

21 de setembro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Transformação de soma em produto

Na aula passada estudamos, dentre outras, a fórmula para calcular o **seno da soma** de dois arcos, ou seja, $\operatorname{sen}(A+B)$, dada por:

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(B)\cos(A).$$

1.1 Soma de senos

Agora, vamos deduzir uma fórmula para a **soma dos senos** de dois arcos, ou seja, para

$$\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta).$$

Esse tipo de fórmula costuma ser útil, pois há casos em que não sabemos os valores de $\operatorname{sen}(\alpha)$ e $\operatorname{sen}(\beta)$ individualmente, mas conseguimos calcular a sua soma. Vamos mostrar que:

$$\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) \;=\; 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \tag{1}$$

Dado o formato da expressão acima, dizemos que esta é uma das fórmulas que "transforma uma soma em um produto" (de um número e funções seno e cosseno aplicadas a argumentos específicos).

Primeiramente, vamos demonstrar porque a fórmula acima é verdadeira (conhecer essa demonstração pode ser útil, caso você esqueça da fórmula mas lembre das fórmulas da aula passada). Comecemos com duas das fórmulas que estudamos na aula passada:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(B)\cos(A) \\ \operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(B)\cos(A). \end{cases} \tag{2}$$

Somando as duas igualdades acima, observe que os termos "$\operatorname{sen}(B)\cos(A)$" irão cancelar-se, fornecendo:

$$\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = 2\operatorname{sen}(A)\cos(B). \tag{3}$$

Agora, faça a substituição de variáveis

$$\begin{cases} A+B=\alpha \\ A-B=\beta \end{cases}.$$

Para terminar, precisamos calcular os valores de A e B, em termos de α e β, resolvendo o sistema acima. Somando as duas equações do sistema, temos

$$(A+\cancel{B})+(A-\cancel{B})=\alpha+\beta \implies 2A=\alpha+\beta;$$

logo,

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Por outro lado, subtraindo a segunda equação do sistema da primeira obtemos:

$$(\cancel{A}+B)-(\cancel{A}-B)=\alpha-\beta \implies 2B=\alpha-\beta;$$

logo,

$$B=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

De posse dos valores de $A+B$, $A-B$, A e B, basta substituí-los na equação (3) para obter:

$$\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Observação 1. *Na expressão acima, veja que como* $\cos(-x)=\cos(x)$ *para todo* x, *poderíamos calcular* $\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ *ao invés de* $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. *Isso também segue do fato de que*

$$\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\beta)=\operatorname{sen}(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha).$$

Vejamos, agora, dois exemplos ilustrando a aplicação da fórmula deduzida acima.

Exemplo 2. *Calcule o valor de* $\operatorname{sen}(75°)+\operatorname{sen}(15°)$.

Solução. Vamos aplicar diretamente a fórmula (1), com $\alpha = 75°$ e $\beta = 15°$. Obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(75°) + \operatorname{sen}(15°) &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{75° + 15°}{2}\right) \cos\left(\frac{75° - 15°}{2}\right) \\
&= 2 \operatorname{sen}(45°) \cos(30°) \\
&= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Mostre que* $\operatorname{sen}(20°) + \operatorname{sen}(40°) = \operatorname{sen}(80°)$*.*

Solução. Novamente, temos uma aplicação direta de (1). Fazendo $\alpha = 20°$ e $\beta = 40°$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(20°) + \operatorname{sen}(40°) &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{20° + 40°}{2}\right) \cos\left(\frac{20° - 40°}{2}\right) \\
&= 2 \operatorname{sen}(30°) \cos(-10°) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(-10°) \\
&= \cos(-10°).
\end{aligned}$$

Agora, uma vez que $\cos(-x) = \cos(x) = \operatorname{sen}(90° - x)$, temos $\cos(-10°) = \operatorname{sen}(90° - 10°) = \operatorname{sen}(80°)$. Portanto,

$$\operatorname{sen}(20°) + \operatorname{sen}(40°) = \operatorname{sen}(80°),$$

como queríamos demonstrar. □

1.2 Diferença de senos

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, podemos obter uma fórmula para a *diferença* entre senos:

$$\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \qquad (4)$$

Basta, nas fórmulas (2), subtrair a segunda equação da primeira (ao invés de somá-las, como fizemos antes). Nesse caso, os termos "$\operatorname{sen}(A)\cos(B)$" é que serão cancelados, o que nos fornecerá:

$$\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B) = 2\operatorname{sen}(B)\cos(A).$$

Novamente fazendo a substituição $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$, $A=(\alpha+\beta)/2$ e $B=(\alpha-\beta)/2$, obtemos a expressão (4).

Observação 4. *Como*

$$\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) \neq \operatorname{sen}(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha),$$

na fórmula da diferença de senos é muito importante manter a ordem de α e β ao calcular $\frac{\alpha-\beta}{2}$. De fato, note que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, *logo,*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

1.3 Soma e diferença de cossenos

A fórmula que transforma uma soma de cossenos em um produto é

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \tag{5}$$

A fim de demonstrá-la, partiremos novamente de duas fórmulas que estudamos na aula passada. Claro, dessa vez tomamos por base as fórmulas dos cossenos:

$$\begin{cases} \cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) \\ \cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B). \end{cases} \tag{6}$$

Somando as duas expressões acima, observe que, dessa vez, são os termos "$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)$" que irão cancelar-se, fornecendo:

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos(A)\cos(B). \tag{7}$$

Como antes, basta fazer a (mesma) substituição de variáveis: $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$, $A=(\alpha+\beta)/2$ e $B=(\alpha-\beta)/2$. Substituindo essas igualdades em (7), obtemos diretamente a fórmula desejada, (1.3).

Por outro lado, podemos obter uma fórmula para a diferença entre cossenos, partindo das identidades (6), mas, agora, subtraindo a segunda equação da primeira. Os termos "$\cos(A)\cos(B)$" serão cancelados, o que nos fornecerá:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B).$$

Mais uma vez, substituindo $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$, $A=(\alpha+\beta)/2$ e $B=(\alpha-\beta)/2$, obtemos a fórmula:

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Exemplo 5. *Mostre que*

$$\frac{\operatorname{sen}(30^\circ)+\operatorname{sen}(40^\circ)+\operatorname{sen}(50^\circ)}{\cos(30^\circ)+\cos(40^\circ)+\cos(50^\circ)}=\operatorname{tg}(40^\circ).$$

Solução. Já que $40=(30+50)/2$, vamos aplicar a fórmula para a soma de senos para calcular

$$\operatorname{sen}(30^\circ)+\operatorname{sen}(50^\circ),$$

na esperança de que isso simplifique a expressão $\operatorname{sen}(30^\circ)+\operatorname{sen}(40^\circ)+\operatorname{sen}(50^\circ)$ (numerador da fração do enunciado). Vejamos! Pela fórmula para a soma de senos, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(50^\circ)+\operatorname{sen}(30^\circ)&=2\operatorname{sen}\left(\frac{50^\circ+30^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{50^\circ-30^\circ}{2}\right)\\&=2\operatorname{sen}(40^\circ)\cos(10^\circ).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen}(30^\circ)+\operatorname{sen}(40^\circ)+\operatorname{sen}(50^\circ)=\\&\quad=2\operatorname{sen}(40^\circ)\cos(10^\circ)+\operatorname{sen}(40^\circ)\\&\quad=\operatorname{sen}(40^\circ)\big(2\cos(10^\circ)+1\big).\end{aligned}$$

Agora, partindo para o denominador, vamos aplicar a fórmula para a soma de cossenos para calcular $\cos(30°)+\cos(50°)$. Vejamos:

$$\begin{aligned}\cos(50°)+\cos(30°) &= 2\cos\left(\frac{30°+50°}{2}\right)\cos\left(\frac{50°-30°}{2}\right)\\ &= 2\cos(40°)\cos(10°).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\cos(30°)+\cos(40°)+\cos(50°)=\\ &=2\cos(40°)\cos(10°)+\cos(40°)\\ &=\cos(40°)\big(2\cos(10°)+1\big).\end{aligned}$$

Finalmente, podemos dividir as expressões obtidas para o numerador e o denominador, o que nos dá:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(30°)+\operatorname{sen}(40°)+\operatorname{sen}(50°)}{\cos(30°)+\cos(40°)+\cos(50°)} &= \frac{\operatorname{sen}(40°)(2\cos(10°)+1)}{\cos(40°)\big(2\cos(10°)+1\big)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}(40°)}{\cos(40°)} = \operatorname{tg}(40°).\end{aligned}$$

□

2 Mais exemplos

Nesta seção, discutimos mais alguns exemplos de aplicações interessantes das fórmulas de transformação em produto.

Exemplo 6. *Mostre que para todo x valem as seguintes relações:*

(*a*) $\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos x.$

(*b*) $\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)$, *para todo n natural.*

Em seguida, use os itens anteriores para simplificar a soma:

$$S=\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\ldots+\cos(mx),$$

em que m é um natural dado e x é um real tal que $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\neq 0.$

Solução. O item (a) é uma aplicação direta da fórmula para a diferença entre senos,

$$\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Fazendo $\alpha = 3x/2$ e $\beta = x/2$, temos que $(\alpha-\beta)/2 = (\frac{3x}{2} - \frac{x}{2})/2 = x/2$ e $(\alpha+\beta)/2 = x$, logo,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos x.$$

O item (b) segue exatamente da mesma forma, bastando tomar $\alpha = (2n+1)x/2$ e $\beta = (2n-1)x/2$, de modo que,

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(2n+1)x}{2} - \frac{(2n-1)x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Resta calcular a expressão S do enunciado. Para isso, vamos somar a relação deduzida no item (b), quando o natural n varia de 1 a m. Assim,

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(x) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{5x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(2x) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{7x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(3x) \\ \quad \vdots \\ \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos(mx) \end{cases} \tag{8}$$

Somando membro a membro todas as igualdades acima, no lado esquerdo temos uma soma telescópica (em que o termo positivo de cada relação cancela com o termo negativo da relação que a segue, com exceção da última). No lado direito, podemos simplesmente colocar $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ em evidência. Com isso, obtemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) =$$
$$= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos mx).$$

Concluímos que

$$\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\ldots+\cos(mx) =$$
$$= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)x}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Opcionalmente, podemos escrever $\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)x}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ como

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{mx}{2}\right)\cos\left(\frac{(m+1)x}{2}\right),$$

obtendo

$$S=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{mx}{2}\right)\cos\left(\frac{(m+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

□

Observação 7. *O real objetivo do exemplo 6 é a simplificação da soma S; os demais itens são dicas para tal. Imagine tentar calcular S sem que o problema informe os itens (a) e (b)! O truque de escrever $2\operatorname{sen}(x/2)\cos(nx)$ como uma diferença de senos e obter uma soma telescópica não é nada óbvio.*

O leitor que possui conhecimentos sobre número complexos pode calcular S de outra maneira. Para tanto, basta tomar o complexo $z=\cos x+i\operatorname{sen} x$ e lembrar da fórmula de de Moivre, que diz que $z^n=\cos(nx)+i\operatorname{sen}(nx)$. Por fim, resta notar que $\cos(x)+\cos(2x)+\ldots+\cos(mx)$ é a parte real de $z+z^2+\ldots+z^m$.

Como ponto positivo dessa abordagem, o cálculo de progressões geométricas acaba sendo mais mecânico, não requerendo um truque especial como o de considerar uma soma telescópica específica. Por outro lado, como ponto negativo, uma vez calculada a soma da progressão, obter sua parte real é um processo relativamente trabalhoso. Vejamos:

Para $z\neq 1$, temos

$$z+z^2+\ldots+z^m=\frac{z^{m+1}-z}{z-1}. \tag{9}$$

Seja $\bar{z} = \cos x - i \operatorname{sen} x$ *o conjugado de* z*. Veja que* $z \cdot \bar{z} = 1$ *e que* $\overline{z-1} = \bar{z} - 1$*. Assim, multiplicando o numerador e o denominador* (9) *por* $\bar{z} - 1$ *obtemos*

$$\frac{z^{m+1} - z}{z - 1} \cdot \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} - 1} = \frac{z^m - z^{m+1} - 1 + z}{2 - z\,\bar{z}}.$$

O denominador $2 - z\,\bar{z}$ *é igual ao número real* $2 - 2\cos(x)$*, ou, ainda,* $2(1 - \cos(x))$*. Por sua vez, a parte real do numerador é igual a*

$$(\cos mx - \cos(m+1)x) - (1 - \cos x).$$

Portanto,

$$S = \frac{\cos mx - \cos(m+1)x - (1 - \cos x)}{2(1 - \cos x)}.$$

Por fim, usando a fórmula para a diferença entre cossenos, podemos chegar à mesma resposta obtida no exemplo 6.

O próximo exemplo segue passos semelhantes ao anterior para calcular uma expressão diferente.

Exemplo 8. *Resolva cada item abaixo.*

(a) Mostre que

$$\operatorname{sen}^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}.$$

(b) Mostre que

$$\operatorname{sen}((2n+1)x) - \operatorname{sen}((2n-1)x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(2nx).$$

(c) Simplifique a soma

$$S = \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}^2(2x) + \operatorname{sen}^2(3x) + \ldots + \operatorname{sen}^2(mx),$$

em que m *é um natural dado e* x *é um real tal que* $\operatorname{sen} x \neq 0$*.*

Solução. O item (a) segue diretamente da fórmula para o seno da metade de um arco (já que nx é a metade de $2nx$). Para quem não conhece essa fórmula, vamos deduzi-la rapidamente, a partir da fórmula para o cosseno de um arco duplo (que vimos na aula passada) e da relação fundamental. De fato, para qualquer arco α temos que

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha;$$

como $\cos^2(\alpha) = 1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)$, segue que

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha),$$

logo,

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

Daí, basta fazer $\alpha = nx$.

O item (b) é uma aplicação direta da fórmula para a diferença entre senos:

$$\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Fazendo $\alpha = (2n+1)x$ e $\beta = (2n-1)x$, temos que $\alpha - \beta = 2x$ e $\alpha + \beta = 4nx$. Então,

$$\operatorname{sen}((2n+1)x) - \operatorname{sen}((2n-1)x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(2nx).$$

Para o item (c), a expressão que se pede, S, é uma soma de quadrados de senos. Usando o item (a) para reescrever cada um desses quadrados, obtemos a expressão:

$$S = \frac{1-\cos(2x)}{2} + \frac{1-\cos(4x)}{2} + \ldots + \frac{1-\cos(2mx)}{2}.$$

Logo,

$$S = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\big(\cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) + \ldots + \cos(2mx)\big).$$

Por fim, para calcular a soma $\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x)+\ldots+\cos(2mx)$, vamos usar o item (b) várias vezes (da mesma forma que fizemos no exemplo 6).

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(3x)-\operatorname{sen}(x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(2x) \\ \operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(4x) \\ \operatorname{sen}(7x)-\operatorname{sen}(5x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(6x) \\ \quad\vdots \\ \operatorname{sen}((2m+1)x)-\operatorname{sen}(2m-1)x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(mx) \end{cases}.$$

Somando todas as igualdades acima e observando que a soma do lado esquerdo é telescópica, segue que:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}\big((2m+1)x\big)-\operatorname{sen}(x)= \\ &=2\operatorname{sen}(x)\big(\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x)+\ldots+\cos(2mx)\big). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} &\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x)+\ldots+\cos(2mx)= \\ &\qquad=\frac{\operatorname{sen}\big((2m+1)x\big)-\operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{sen}(x)}. \end{aligned}$$

Por fim, a expressão que se pede no enunciado é:

$$S=\frac{m}{2}-\frac{\operatorname{sen}\big((2m+1)x\big)-\operatorname{sen}(x)}{4\operatorname{sen}(x)}.$$

$\square$

Observação 9. *Também é possível chegar ao resultado do último exemplo acima usando a fórmula para* $\cos(x)+\cos(2x)+\ldots+\cos(mx)$ *obtida no exemplo 6, substituindo* x *por* $2x$*. Convença-se da validade dessa afirmação!*

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos.

O uso de números complexos no auxílio da resolução de problemas de Trigonometria (e vice-versa) é algo que deveria ser mais difundido no Ensino Médio (contudo, requer que a turma tenha uma boa familiaridade com números complexos, ou pelo menos que os temas sejam apresentados em paralelo). No módulo "Números Complexos – Forma Geométrica" do Terceiro ano do Ensino Médio, usamos as fórmulas de $\operatorname{sen}(A+B)$ e $\cos(A+B)$ para demonstrar que $\operatorname{cis}(\theta_1)\cdot\operatorname{cis}(\theta_2)=\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.