Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Operações com Números Naturais - Parte 2

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de dezembro de 2020

Portal da Matemática
OBMEP

1 Exercicícios variados

Neste material, continuaremos apresentando exercícios variados, os quais envolvem conteúdos como operações aritméticas e divisibilidade de números naturais.

Exemplo 1 (Colégio Naval). *Um número natural de 6 algarismos começa, à esquerda, pelo algarismo* 1*. Levando este algarismo* 1 *para o último lugar, à direita, e conservando a sequência dos demais algarismos, o novo número é o triplo do número primitivo. O número primitivo é:*

(a) 100006.

(b) *múltiplo de* 11.

(c) *múltiplo de* 4.

(d) *maior que* 180000.

(e) *divisível por* 5.

Solução. Vamos denotar esse número de 6 algarismos por $1ABCDE$. O enunciado do problema diz que, quando mudamos o algarismo 1 para o último lugar, à direita, conservando a sequência dos demais algarismos, o novo número é o triplo do número primitivo, ou seja,

$$3 \cdot 1ABCDE = ABCDE1.$$

Seguindo as regras para efetuar a multiplicação acima, obtemos $E = 7$, pois o triplo de E tem algarismo das unidades igual a 1. Prosseguindo com o algoritmo da multiplicação, concluímos que o algarismo da unidades de $3D + 2$ é igual a 7 (note que vinte unidades do produto $3 \cdot 7 = 21$ foram transformadas em duas dezenas e adicionadas à segunda coluna). Assim, obtemos $D = 5$. Prosseguindo com o algoritmo, o algarismo das unidades de $3C + 1$ deve ser igual a 5, o que acarreta $C = 8$; o algarismo das unidades de $3B + 2$ deve ser igual a 8, donde concluímos que $B = 2$ e, finalmente, o algarismo das unidades de $3A$ deve ser igual a 2, o que implica $A = 4$. Assim, o número original é 142857.

Agora, veja que a soma dos algarismo das ordens ímpares de 142857 é $7+8+4=19$ e a soma dos algarismos das ordens pares é $1+2+5=8$; logo, a diferença entre essas somas é $19-8=11$. Portanto, utilizando o critério de divisibilidade por 11 – o qual diz que um número natural é divisível por 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarimos das ordens pares é divisível por 11 – concluímos que 142857 é divisível por 11. Assim, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Exemplo 2 (Colégio Naval). *Para registrar o resultado da operação $2^{101} \cdot 5^{97}$, o número de dígitos necessários é:*

(*a*) 96.

(*b*) 97.

(*c*) 98.

(*d*) 99.

(*e*) 100.

Solução. Veja que

$$\begin{aligned} 2^{101} \cdot 5^{97} &= 2^{4+97} \cdot 5^{97} \\ &= \left(2^4 \cdot 2^{97}\right) \cdot 5^{97} \\ &= 2^4 \cdot \left(2^{97} \cdot 5^{97}\right) \\ &= 16 \cdot (2 \cdot 5)^{97} \\ &= 16 \cdot 10^{97}. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado das operações $2^{101} \cdot 5^{97}$ é o número formado por um algarismo 1, um algarismo 6 e uma sequência de noventa e sete algarimos 0, logo, possui $1+1+97=99$ algarismos. Desse modo, a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 3. *Quantos algarismos são necessários para escrever a representação decimal do número que é o resultado das operações $8^{23} \cdot 25^{36}$?*

(*a*) 59.

(*b*) 69.

(*c*) 72.

(*d*) 74.

(*e*) 77.

Solução. Temos que

$$
\begin{aligned}
8^{23} \cdot 25^{36} &= \left(2^3\right)^{23} \cdot \left(5^2\right)^{36} \\
&= 2^{3\cdot 23} \cdot 5^{2\cdot 36} \\
&= 2^{69} \cdot 5^{72} \\
&= 2^{69} \cdot 5^{69+3} \\
&= 2^{69} \cdot \left(5^{69} \cdot 5^3\right) \\
&= \left(2^{69} \cdot 5^{69}\right) \cdot 5^3 \\
&= (2 \cdot 5)^{69} \cdot 125 \\
&= 10^{69} \cdot 125.
\end{aligned}
$$

Logo, $8^{23} \cdot 25^{36}$ possui exatamente $3 + 69 = 72$ algarismos. Assim, a alternativa correta é a letra **(c)**. □

Exemplo 4 (Colégio Naval). *O número* 38 *é dividido em duas parcelas. A maior parcela, dividida pela menor, dá quociente* 4 *e resto* 3*. Qual é o produto dessas duas parcelas?*

(*a*) 240.

(*b*) 136.

(*c*) 217.

(*d*) 105.

(*e*) 380.

Solução. Denotando por X a menor das parcelas, a outra parcela será $4X+3$ (soma do produto entre divisor e quociente com o resto). Daí, segue que

$$X + 4X + 3 = 38,$$

ou seja,

$$5X + 3 = 38.$$

Subtraindo 3 dos dois lados da equação acima, obtemos

$$5X + 3 - 3 = 38 - 3 \Longrightarrow 5X = 35.$$

Finalmente, notando agora que X é o número que multiplicado por 5 resulta em 35, obtemos $X = 7$. Logo, a maior parcela é $4 \cdot 7 + 3 = 31$ e o produto das duas parcelas é $7 \cdot 31 = 217$. Assim, a alternativa correta é a letra **(c)**. $\square$

Exemplo 5 (Colégio Naval). *O número natural N, de dois algarismos, quando dividido por 13, dá quociente A e resto B e, quando dividido por 5, dá quociente B e resto A. A soma de todos os valores de N que se adaptam às condições acima é igual a:*

(a) 160.

(b) 136.

(c) 142.

(d) 96.

(e) 84.

Solução. Quando dividimos N por por 13, o quociente é A e resto é B, logo, $N = 13A + B$. Analogamente, quando dividimos N por 5, o quociente é B e o resto é A, logo, $N = 5B + A$. Daí, segue que $13A + B = 5B + A$. Subtraindo B nos dois lados de $13A + B = 5B + A$, obtemos

$$\begin{aligned} 13A + B = 5B + A &\Longrightarrow 13A + B - B = 5B + A - B \\ &\Longrightarrow 13A = 4B + A. \end{aligned}$$

Agora, subtraindo A em ambos os lados da última igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} 13A = 4B + A &\Longrightarrow 13A - A = 4B + A - A \\ &\Longrightarrow 12A = 4B, \end{aligned}$$

ou seja,

$$B = 3A.$$

Agora, analisaremos os possíveis valores de N atribuindo valores a A.

- Se $A = 1$, então $B = 3 \cdot 1 = 3$ e $N = 13 \cdot 1 + 3 = 16$;
- Se $A = 2$, então $B = 3 \cdot 2 = 6$ e $N = 13 \cdot 2 + 6 = 32$;
- Se $A = 3$, então $B = 3 \cdot 2 = 9$ e $N = 13 \cdot 3 + 9 = 48$;
- Se $A = 4$, então $B = 3 \cdot 2 = 12$ e $N = 13 \cdot 4 + 12 = 64$.

Note que A é o resto na divisão de N por 5, logo, A é, no máximo, igual a 4. Portanto, a soma dos possíveis valores de N é

$$16 + 32 + 48 + 64 = 160.$$

A alternativa correta é a letra **(a)**. □

Exemplo 6 (CMF). *A soma de dois números é* 106*. Na divisão do maior pelo menor, o quociente é* 4 *e o resto é* 11*. A diferença entre o maior e o triplo do menor é:*

(*a*) 60.

(*b*) 50.

(*c*) 40.

(*d*) 30.

(*e*) 20.

Solução. Vamos denotar por X o menor dos números. Repetindo o raciocínio empregado na solução do exemplo 4, obtemos que o maior dos números é $4X + 11$. Assim,

$$X + 4X + 11 = 106 \Longrightarrow 5X + 11 = 106.$$

Subtraindo 11 nos dois lados da equação acima, obtemos

$$5X + 11 - 11 = 106 - 11 \Longrightarrow 5X = 95.$$

Agora fica fácil perceber que $X = 19$, pois é o número cujo quíntuplo é igual a 95. Logo, o outro número é igual a $106 - 19 = 87$. Portanto, a diferença entre o maior e o triplo do menor é:

$$87 - 3 \cdot 19 = 87 - 57 = 30.$$

A alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 7. *Resolvendo a expressão numérica* $\sqrt{\frac{2^{13}+2^{16}}{2^{15}}}$*, obtemos:*

(*a*) $\sqrt{2}$.

(*b*) 1,5.

(*c*) 2,25.

(*d*) 2^7.

(*e*) 1.

Solução. Temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2^{13}+2^{16}}{2^{15}}} &= \sqrt{\frac{2^{13}+2^{13+3}}{2^{13+2}}} = \sqrt{\frac{2^{13}+2^{13}\cdot 2^3}{2^{13}\cdot 2^2}}\\ &= \sqrt{\frac{2^{13}(1+8)}{2^{13}\cdot 2^2}} = \sqrt{\frac{\cancel{2^{13}}\cdot 9}{\cancel{2^{13}}\cdot 4}}\\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.\end{aligned}$$

Logo, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Exemplo 8 (Colégio Naval). *Simplificando a expressão*

$$\frac{6 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 300}{(2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 98) \cdot (4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 100)},$$

obtém-se:

(*a*) 3^{50}.

(*b*) $\frac{3}{2}$

(*c*) $\left(\frac{3}{2}\right)^{23}$.

(*d*) $\frac{3}{4}$.

(*e*) 2^{25}.

Solução. Note que

$$\begin{aligned} 6 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 300 &= (2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 3) \ldots \cdot (100 \cdot 3) \\ &= 3^{50} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 100. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{6 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 300}{(2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 98) \cdot (4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 100)} =$$

$$= \frac{3^{50} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 100}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 100} = 3^{50}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(a)**. □

Exemplo 9 (CMRJ). *Calcule e assinale o valor da multiplicação dos* 30 *fatores abaixo:*

$$\left(\frac{1}{40} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{41} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{42} + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{68} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{69} + 1\right).$$

(*a*) $\frac{49}{50}$.

(*b*) $\frac{41}{69}$.

(*c*) $\frac{7}{4}$.

(d) $\frac{50}{49}$.

(e) $\frac{13}{23}$.

Solução. Efetuando cada uma das adições entre parênteses, obtemos

$$\left(\frac{1}{40}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{41}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{42}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{68}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{69}+1\right)=$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cancel{41}}{40}\cdot\frac{\cancel{42}}{\cancel{41}}\cdot\frac{\cancel{43}}{\cancel{42}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{69}}{\cancel{68}}\cdot\frac{70}{\cancel{69}} \\ &= \frac{70}{40}=\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(c)**. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas três sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

No exemplo 9, é provável que alguns alunos sintam dificuldade para compreender os cancelamentos que não aparecem explicitamente na solução (o que acontece com os números 43 e 68, por exemplo). Escreva mais alguns fatores para facilitar o entendimento desses cancelamentos.

Por fim, antes de resolver cada problema, recomendamos fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos que serão necessários para elaborar e/ou apresentar a solução.