Material Teórico - Módulo Cardinalidade de Conjuntos

Contando os Elementos de um Conjunto

Tópicos Adicionais

Autor: Antonio Caminha M. Neto

20 de Junho de 2024

1 Introdução

Neste módulo, discutiremos como definir o *tamanho* de um conjunto e como comparar os tamanhos de dois conjuntos diferentes.

À primeira vista, isso pode parecer uma bobagem. Realmente, para $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{w, x, y, z\}$, por exemplo, já estamos acostumados a dizer que X tem três elementos e Y tem quatro elementos e que, por isso, X é menor que Y em relação ao número de elementos.

Mas e no caso em que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, o conjunto dos naturais, e $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, o conjunto dos naturais pares? Por um lado, ambos são conjuntos infinitos; por outro, $\mathbb{P}$ é um subconjunto de $\mathbb{N}$. Então, *o infinito de* $\mathbb{P}$ *é menor que o infinito de* $\mathbb{N}$?

Antes de passarmos a uma discussão matematicamente precisa dessa problemática, vejamos um exemplo que mostra que o conceito de *infinito* é, por vezes, paradoxal à intuição comum.

Exemplo 1 (o hotel de Hilbert). [1] Imagine um hotel com infinitos quartos, numerados 1, 2, 3, 4 e assim por diante. Certo dia, chegam ao hotel infinitos hóspedes, de nomes h_1, h_2, h_3, h_4, ... A recepção do hotel designa o quarto i para o hóspede h_i, de forma que o hóspede h_1 instala-se no quarto 1, o hóspede h_2 instala-se no quarto 2, o hóspede h_3 instala-se no quarto 3 etc. Assim, esse dia termina com todos os quartos do hotel ocupados.

No dia seguinte, um novo hóspede chega ao hotel e encontra todos os quartos ocupados. A recepção, rapidamente arranja um quarto para ele, simplesmente pedindo que o hóspede h_i, que encontrava-se no quarto i, troque de quarto, indo agora para o quarto $i + 1$. Assim, o hóspede h_1 muda para o quarto 2, o hóspede h_2 para o quarto 3, o hóspede h_3 para o quarto 4 etc, e o quarto 1, que antes estava ocupado, agora pode receber o novo hóspede.

[1] O nome *hotel de Hilbert* é uma homenagem ao matemático alemão dos séculos XIX e XX David Hilbert, que apresentou esse exemplo numa palestra intitulada "*Sobre o infinito*", proferida em 1925.

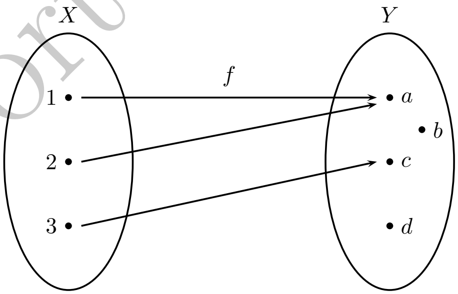
Para complicar as coisas, no próximo dia chegam infinitos novos hóspedes, de nomes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ..., mas a recepção não se abala e garante que vai colocar cada um em um quarto vazio. Dessa vez, ela faz isso deslocando o hóspede que estava no quarto i para o quarto $2i$. Assim, o o hóspede que estava no quarto 1 muda para o quarto 2, o que estava no quarto 2 muda para o quarto 4, o que estava no quarto 3 muda para o quarto 6 etc, e os infinitos quartos 1, 3, 5, ... ficam vazios, prontos para receber os novos hóspedes. A recepção, então, designa o quarto $2i - 1$ para o hóspede ℓ_i, de forma que ℓ_1 fica no quarto $2 \cdot 1 - 1 = 1$, ℓ_2 fica no quarto $2 \cdot 2 - 1 = 3$, ℓ_3 fica no quarto $2 \cdot 3 - 1 = 5$, e assim sucessivamente.

O infinito é realmente algo estranho ...

2 Funções

A comparação entre tamanhos de conjuntos é feita por meio de *funções*. Por isso, nesta seção nos concentraremos em revisar rapidamente os conceitos relevantes.

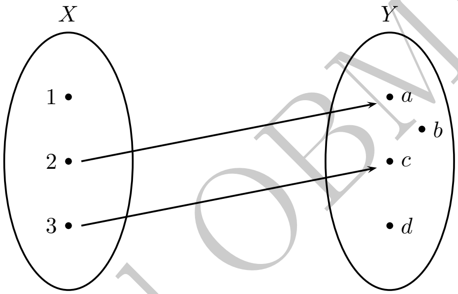
Dados conjuntos não vazios X e Y, uma *função f de X em Y* é uma *regra* que, a cada elemento $x \in X$, faz corresponder um único elemento $y \in Y$. Por vezes, representamos uma tal correspondência utilizando diagramas como o da figura a seguir.

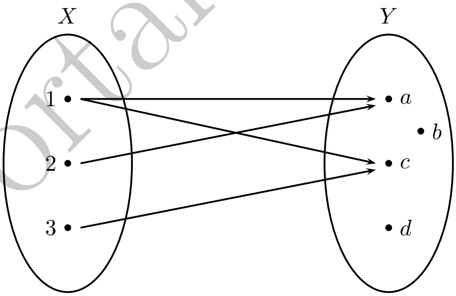


Nela, $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ e cada seta indica que elemento $y \in Y$ corresponde a cada $x \in X$.

Escrevemos $f : X \to Y$ para denotar que f é uma função de X em Y. Nesse caso, o elemento $y \in Y$ associado a $x \in X$ por f é denotado por $y = f(x)$, sendo denominado a **imagem** de $x \in X$ pela função f. Assim, no exemplo da figura anterior, temos $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = c$; em palavras, a é a imagem de 1 e de 2 por f, e c é a imagem de 3 por f.

O exemplo anterior deixa claro que a definição de função permite que, no diagrama correspondente, um ou mais elementos de Y *não recebam setas* ou, ainda, que um ou mais elementos de Y *recebam mais de uma seta*. Note, contudo, que os próximos dois diagramas *não representam* funções.





A situação da penúltima figura é proibida porque não há nenhuma seta partindo do elemento $1 \in X$; a da última figura é proibida porque, do elemento $1 \in X$, parte mais de uma seta.

O mais das vezes, trabalharemos com funções $f : X \to Y$ tais que $X, Y \subset \mathbb{R}$. Em tais casos, geralmente indicaremos quem é o elemento $f(x) \in Y$ associado a um elemento genérico $x \in X$ por meio de uma *fórmula* em x que explicita uma regra que a função deva satisfazer.

Por exemplo, podemos dizer: *considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. Isto quer dizer que a função associa, a cada $x \in \mathbb{R}$, seu quadrado x^2. Veja que os requisitos definidores de uma função estão satisfeitos, uma vez que, a cada $x \in \mathbb{R}$, temos associado um único outro real $f(x)$, qual seja, x^2. Assim é que, ainda em relação a esse exemplo, temos $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, $f(3) = 3^2 = 9$ etc.

Neste módulo, estamos interessados em funções satisfazendo certas propriedades adicionais, colecionadas na seguinte

Definição 2. *Uma função $f : X \to Y$ é:*

(a) ***Injetora**, ou **injetiva**, se, para todo $y \in Y$, existir no máximo um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

(b) ***Sobrejetora**, ou **sobrejetiva** se sua imagem for todo o conjunto Y, isto é, se, para todo $y \in Y$, existir pelo menos um $x \in X$, tal que $y = f(x)$.*

(c) ***Bijetora**, ou **bijetiva**, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.*

Um modo eficiente de verificar se uma função $f : X \to Y$ é injetora é verificar se a implicação

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

é satisfeita para todos $x_1, x_2 \in X$.

Da mesma forma, para garantirmos que f é sobrejetora, devemos ser capazes de, para cada $y \in Y$, obter pelo menos uma solução $x \in X$ para a equação $f(x) = y$.

Exemplo 3. Se $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função dada por $f(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é injetiva, mas não sobrejetiva. Realmente, dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(m) = f(n) \Rightarrow 2m = 2n \Rightarrow m = n.$$

Por outro lado, como $2n$ é um número par, para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que nenhum natural ímpar pertence à imagem de f; assim, f não pode ser sobrejetiva.

Denotemos por $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ o conjunto dos naturais pares e considerarmos a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ dada por $g(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Argumentando como no parágrafo anterior, vemos que g é injetiva. Contudo, g também é sobrejetiva: dado $m \in \mathbb{P}$, temos, pela definição de número par, $m = 2n$, para algum $n \in \mathbb{N}$; assim, $m = g(n)$, isto é, m pertence à imagem de g.

Exemplo 4. Dado um conjunto não vazio X, a **função identidade de $\boldsymbol{X}$** é a função $\mathrm{Id}_X : X \to X$, tal que

$$\mathrm{Id}_X(x) = x, \ \forall\, x \in X.$$

Essa função é claramente bijetiva.

Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ temos, em última análise, regras bem definidas para, partindo de $x \in X$, obter $y = f(x) \in Y$ e, em seguida, obter $z = g(y) \in Z$. Parece, então, razoável que possamos formar uma função saindo de X diretamente para Z. Este é de fato o caso, de acordo com a seguinte

Definição 5. *Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a **função composta** de f e g (nessa ordem) é a função $g \circ f : X \to Z$ definida, para cada $x \in X$, por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Assim, a definição acima diz que, para encontrar a imagem de $x \in X$ por $g \circ f$, basta encontrar a imagem de $f(x) \in Y$ por g. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 6. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Temos $g \circ f$ e $f \circ g$ funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= \frac{1}{(f(x))^2 + 1} \\ &= \frac{1}{(x^2)^2 + 1} = \frac{1}{x^4 + 1}\end{aligned}$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{1}{x^4+2x^2+1}.$$

O exemplo acima mostra algo interessante: podemos ter $g \circ f \neq f \circ g$. Bem entendido, pode mesmo acontecer que possamos formar $g \circ f$ mas não $f \circ g$ (ou vice-versa); basta termos, por exemplo, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, com $X \neq Z$. Contudo, mesmo que possamos formar ambas as funções, o exemplo mostra que, ainda assim, pode ocorrer que $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemplo 7. Se $f : X \to Y$ é uma função arbitrária e $\mathrm{Id}_X : X \to X$ e $\mathrm{Id}_Y : Y \to Y$ são, respectivamente, as funções identidade de X e Y, então

$$f \circ \mathrm{Id}_X = f \quad \text{e} \quad \mathrm{Id}_Y \circ f = f.$$

Verifiquemos a igualdade $f \circ \mathrm{Id}_X = f$, sendo a verificação da outra totalmente análoga. Para tanto, basta notarmos que $f \circ \mathrm{Id}_X$ é uma função de X em Y tal que, para todo $x \in X$,

$$(f \circ \mathrm{Id}_X)(x) = f(\mathrm{Id}_X(x)) = f(x).$$

A proposição a seguir ensina como se comportam funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras em relação à composição.

Proposição 8. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções dadas. Então:*

(a) *g, f injetoras $\Rightarrow g \circ f$ injetora.*

(b) *g, f sobrejetoras $\Rightarrow g \circ f$ sobrejetora.*

(c) *g, f bijetoras $\Rightarrow g \circ f$ bijetora.*

Prova.
(a) Utilizando sucessivamente as injetividades de g e f, temos, para x_1 e x_2 em X, que

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2,\end{aligned}$$

e $g \circ f$ também é injetora.

(b) Escolhido arbitrariamente $z \in Z$, a sobrejetividade de g garante a existência de $y \in Y$ tal que $z = g(y)$. Por outro lado, a sobrejetividade de f assegura a existência de $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Então, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z,$$

de modo que $g \circ f$ também é sobrejetiva.

(c) Segue dos itens (a) e (b) que

$$\begin{aligned} g \text{ e } f \text{ bijetoras} &\Rightarrow g \text{ e } f \text{ injetoras e sobrejetoras} \\ &\Rightarrow g \circ f \text{ injetora e sobrejetora} \\ &\Rightarrow g \circ f \text{ bijetora.} \end{aligned}$$

□

3 Conjuntos finitos

Em tudo o que segue, dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o conjunto dos naturais de 1 a n. Assim,

$$\begin{aligned} &I_1 = \{1\} \\ &I_2 = \{1, 2\} \\ &I_3 = \{1, 2, 3\} \\ &\ldots\ldots \\ &I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Comparamos o "*tamanho*" de dois conjuntos verificando se existe uma bijeção entre ambos. Formalmente, temos a seguinte

Definição 9. *Dados conjuntos não vazios X e Y, diremos que X e Y* ***têm cardinalidades iguais*** *se existir uma bijeção $f : X \to Y$.*

Assim, o exemplo 3 garante que os conjuntos infinitos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{P}$ têm cardinalidades iguais.

Por outro lado, o conjunto $X = \{a, b, c\}$ e $I_3 = \{1, 2, 3\}$ têm cardinalidades iguais, uma vez que a função $f : X \to I_3$ tal que $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ é uma bijeção.

Quando um conjunto não vazio X tiver a mesma cardinalidade de I_n, para algum $n \in \mathbb{N}$, diremos que X **tem n elementos** ou que é **finito**, situação que denotaremos escrevendo

$$|X| = n \quad \text{ou} \quad \#X = n.$$

Veja, então, que *contar a quantidade de elementos de um conjunto finito* X é estabelecer uma bijeção entre X e I_n, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Neste e nos próximos materiais, assumiremos sem demonstração a validade dos seguintes fatos (veja, contudo, o capítulo 2 de [2]):

1. Se I_m e I_n tiverem cardinalidades iguais (isto é, se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$), então $m = n$.

2. Se $m < n$, então existe uma função injetiva, mas não sobrejetiva, de I_m em I_n.

3. Se $m > n$, então existe uma função sobrejetiva, mas não injetiva, de I_m em I_n.

4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe função injetiva, mas não sobrejetiva, de I_n em $\mathbb{N}$.

5. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe função sobrejetiva, mas não injetiva, de $\mathbb{N}$ em I_n.

Graças ao item 4 acima, $\mathbb{N}$ é um conjunto **infinito**, isto é, *não finito*. Por outro lado, o exemplo 3 garante que $\mathbb{P}$ também é infinito. Mais geralmente, tem-se o seguinte

Exemplo 10. Seja X um conjunto não vazio. Se X e $\mathbb{N}$ tiverem cardinalidades iguais, então X não pode ser finito.

Prova. Seja $f : \mathbb{N} \to X$ uma bijeção. Se X fosse finito, existiriam $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $g : X \to I_n$. Então, pelo item (c) da proposição 8, a composta $g \circ f : \mathbb{N} \to I_n$ seria uma bijeção, o que o item 5 acima afirma ser impossível. $\square$

Um ponto sutil, mas que deve ser observado com cuidado e será retomado posteriormente, é o seguinte: pelas definições dadas, o fato de um conjunto X *ser infinito* não significa que exista uma bijeção entre X e $\mathbb{N}$. De fato, posteriormente, mostraremos que $\mathbb{R}$ é infinito, mas *não existe* uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

Dicas para o Professor

Conforme mencionamos, a alegoria do *Hotel de Hilbert* remonta a uma palestra do próprio Hilbert. Elaborando aquele exemplo um pouco mais, imagine que, em um certo dia, cheguem ao hotel infinitos ônibus, cada um deles trazendo infinitos hóspedes. Como a recepção do hotel poderia alocá-los nos quartos, ainda deixando uma quantidade infinita de quartos vazios? O leitor intrigado pode consultar a referência [3] para descobrir a estratégia utilizada pela recepção.

A seção 2 é um extrato do capítulo 1 da referência [1]. Recomendamos sua leitura, ou, alternativamente, a leitura do capítulo 1 da referência [2], para muito mais sobre funções.

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*, terceira edição.

2. E. L. Lima. *Curso de Análise, volume* 1, décima primeira edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2014. Rio de Janeiro, SBM, 2023.

3. Wikipedia. *Hotel de Hilbert.*