

# Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1

## Retas Cortadas por uma Transversal

Oitavo Ano

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**



# 1 Retas cortadas por uma transversal

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas situadas em um mesmo plano, ambas concorrentes com uma reta  $t$ , como mostrado na Figura ??.

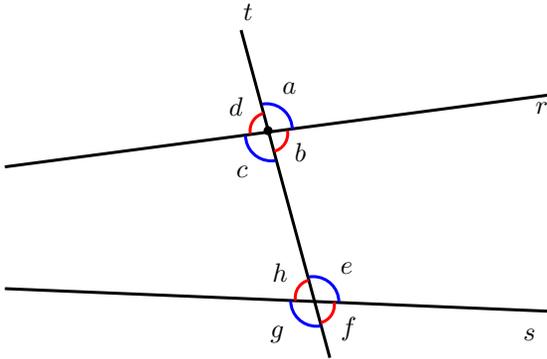


Figura 1: retas cortadas por uma transversal.

A reta  $t$  é uma reta **transversal** às retas  $r$  e  $s$ . A interseção de  $t$  com  $r$  determina os ângulos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  da figura, ao passo que a interseção de  $t$  com  $s$  determina os ângulos  $e$ ,  $f$ ,  $g$  e  $h$ . Alguns pares formados por esses oito ângulos recebem denominações especiais, como veremos a seguir.

Os pares  $a$ ,  $g$  e  $d$ ,  $f$  são chamados **alternos externos**, enquanto os pares  $b$ ,  $h$  e  $c$ ,  $e$  são denominados **alternos internos**. Os pares  $a$ ,  $f$  e  $d$ ,  $g$  são chamados **colaterais externos**, e os pares  $b$ ,  $e$  e  $c$ ,  $h$  são denominados **colaterais internos**.

Destacamos, ainda, os pares  $a$ ,  $e$ ;  $b$ ,  $f$ ;  $c$ ,  $g$  e  $d$ ,  $h$ , chamados **ângulos correspondentes**.

Observando mais uma vez a Figura ??, note que os pares de ângulos  $a$ ,  $c$  e  $e$ ,  $g$  são opostos pelo vértice (OPV), logo,  $c = a$  e  $e = g$ . Portanto, se  $c = e$ , então  $a = c = e = g$ . Daí, como  $d$  é o suplementar de  $c$  e  $h$  é o suplementar de  $g$ , temos

$$d = 180^\circ - c = 180^\circ - g = h.$$

Então, argumentando como acima, concluímos que

$$c = e \Rightarrow b = d = f = h.$$

Mais geralmente, argumentando também como fizemos acima, temos a seguinte propriedade importante dos ângulos determinados por uma transversal:

A congruência dos ângulos de qualquer um dos pares de ângulos alternos (ou correspondentes) acarreta a congruência dos ângulos que formam os demais pares. Se um par de ângulos colaterais (externos ou internos) é formado por ângulos suplementares, então todos os pares de ângulos alternos (ou correspondentes) são congruentes.

A igualdade das medidas dos pares de ângulos descritos acima tem uma implicação importantíssima sobre a posição relativa das retas  $r$  e  $s$ , a qual isolamos a seguir:

Se, quando cortadas por uma reta transversal, duas retas situadas em um mesmo plano determinam um par de ângulos alternos (ou correspondentes) congruentes, então essas retas são paralelas.

Nas notações da Figura ??, como  $a + b = 180^\circ$ , temos  $a = e$  se, e só se,  $b + e = 180^\circ$ . Isto posto, podemos rephraser o critério acima da seguinte forma equivalente, a qual também é, por vezes, bastante útil.

No critério acima, a condição “determinam um par de ângulos alternos (ou correspondentes) congruentes” pode ser substituída por “determinam um par de ângulos colaterais suplementares”.

Reciprocamente, quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, obtemos uma importante relação de congruência entre os pares de ângulos descritos acima, como mostra o resultado enunciado abaixo.

Se duas retas paralelas  $r$  e  $s$  são cortadas por uma reta transversal  $t$ , então todos os pares de ângulos alternos (ou correspondentes) são formados por ângulos congruentes. Neste caso, os pares de ângulos colaterais são formados por ângulos suplementares.

Vejamos algumas aplicações dos fatos listados acima:

**Exemplo 1.** Na figura a seguir, temos  $r \parallel s \parallel t$ . Calcule, em graus, os valores dos ângulos  $x$  e  $y$ .

**Solução.** Uma vez que os ângulos (alternos internos) que medem  $3x - y$  e  $45^\circ$  são formados pelas interseções das retas paralelas  $r$  e  $s$  com a transversal  $u$ , temos

$$3x - y = 45^\circ.$$

Analogamente, observando agora as interseções de  $s$  e  $t$ , que também são paralelas, com a reta  $u$ , obtemos

$$5y - \frac{3x}{2} = 3x - y$$

(pois esses ângulos também são alternos internos).

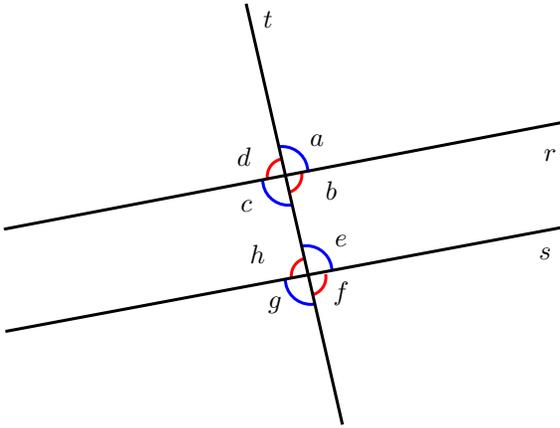
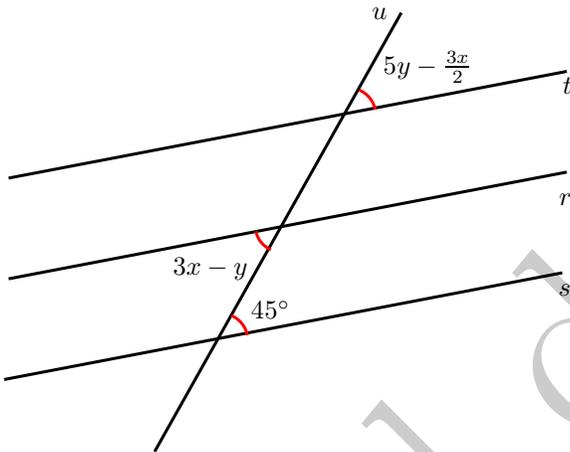


Figura 2: retas paralelas cortadas por uma transversal.



A primeira equação implica  $y = 3x - 45^\circ$ . Substituindo esse valor de  $y$  na segunda equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 5(3x - 45^\circ) - \frac{3x}{2} &= 3x - (3x - 45^\circ) \\ \Rightarrow 15x - 225^\circ - \frac{3x}{2} &= 3x - 3x + 45^\circ \\ \Rightarrow 15x - \frac{3x}{2} &= 45^\circ + 225^\circ \\ \Rightarrow \frac{27x}{2} &= 270^\circ \\ \Rightarrow x &= 20^\circ. \end{aligned}$$

Daí,

$$y = 3x - 45^\circ \Rightarrow y = 3 \cdot 20^\circ - 45^\circ \Rightarrow y = 15^\circ.$$

□

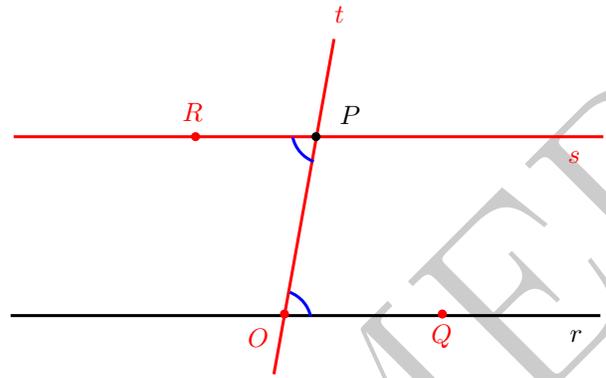


Figura 3: existência de reta paralela a uma reta dada.

Nossa segunda aplicação é muito importante, por fornecer um método prático para traçarmos retas paralelas.

Nos séculos IV e III a.C., ao sistematizar a geometria conhecida na antiguidade clássica, Euclides de Alexandria enunciou seu famoso **postulado das paralelas**, que afirma que, em um plano:

Dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , com  $P$  não pertencente a  $r$ , existe uma única reta  $s$ , paralela a  $r$  e que contém o ponto  $P$ .

Suponha, pois, que temos dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , com  $P \notin r$ . Como a paralela a  $r$  passando por  $P$  existe e é única, para construí-la é suficiente construirmos uma reta passando por  $P$  que seja paralela a  $r$ .

Para tanto (veja a Figura ??), começamos traçando por  $P$  uma reta qualquer  $t$ , concorrente com  $r$ . Em seguida, marcamos o ponto  $O$ , de interseção das retas  $r$  e  $t$ . Consideramos um ponto  $Q \in r$ , com  $Q$  diferente de  $O$ , e construimos o ângulo  $\angle QPR$ , congruente a  $\angle POQ$  e tal que os pontos  $R$  e  $Q$  estejam situados em semiplanos distintos, dos determinados pela reta  $t$ .

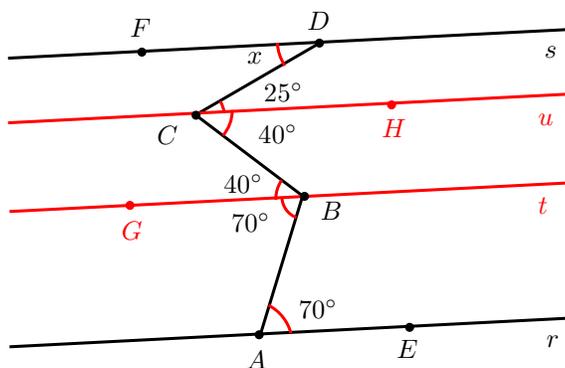
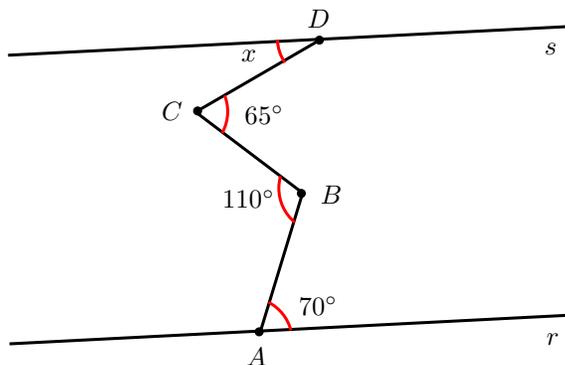
A reta  $s = \overleftrightarrow{RP}$  é paralela a  $r$ , pois  $\angle QPR$  e  $\angle POQ$  são ângulos alternos internos congruentes.

**Exemplo 2.** Na figura a seguir, sabendo que  $r \parallel s$ , calcule a medida, em graus, do ângulo  $x$ .

**Solução.** Começamos traçando pelos pontos  $B$  e  $C$ , respectivamente, retas  $t$  e  $u$ , paralelas à reta  $r$  (e, consequentemente, paralelas também à reta  $s$  – veja a figura a seguir).

Em seguida, marcamos os pontos  $E \in r$ ,  $F \in s$ ,  $G \in t$  e  $H \in u$ , também conforme mostrado na figura acima. Como  $t \parallel r$  e os ângulos  $\angle EAB$  e  $\angle ABG$  são alternos internos, temos  $\widehat{EAB} = \widehat{ABG} = 70^\circ$ . Por outro lado,

$$110^\circ = \widehat{ABC} = \widehat{ABG} + \widehat{GBC} = 70^\circ + \widehat{GBC},$$



de onde obtemos  $\widehat{GBC} = 40^\circ$ .

Agora, uma vez que as retas  $t$  e  $u$  são paralelas e os ângulos  $\angle GBC$  e  $\angle BCH$  são alternos internos, repetindo o argumento acima obtemos  $40^\circ = \widehat{GBC} = \widehat{BCH}$ . Mas, como

$$65^\circ = \widehat{BCD} = \widehat{BCH} + \widehat{HCD} = 40^\circ + \widehat{HCD},$$

concluimos que  $\widehat{HCD} = 25^\circ$ .

Agora, notando que as retas  $s$  e  $u$  são paralelas e que os ângulos  $\angle HCD$  e  $\angle CDF$  são alternos internos, temos

$$x = \widehat{CDF} = \widehat{HCD} = 25^\circ.$$

□

No exemplo anterior, observe que

$$\widehat{EAB} + \widehat{BCD} = 70^\circ + 65^\circ = 135^\circ$$

e

$$\widehat{ABC} + \widehat{CDF} = 110^\circ + 25^\circ = 135^\circ.$$

Repetindo o argumento utilizado, obtemos, mais geralmente, o seguinte fato, ao qual nos referiremos como o **teorema dos bicos**:

Na Figura ??, se  $r \parallel s$ , então

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

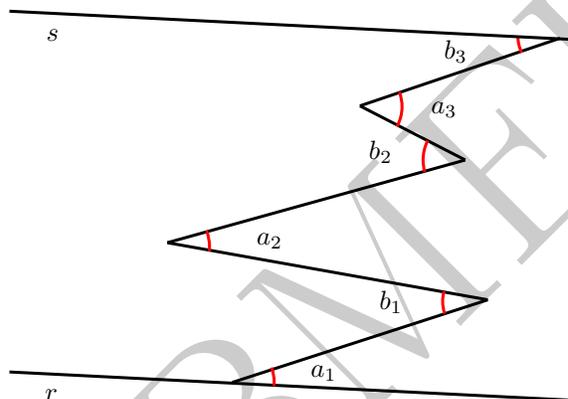
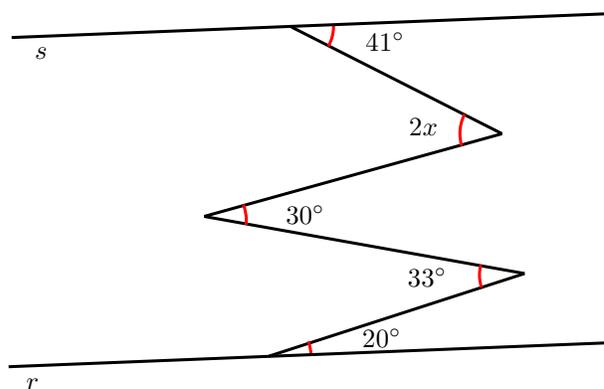


Figura 4: o teorema dos bicos.

Observe que, no exemplo ??, havia dois ângulos com vértice à esquerda e dois com vértice à direita. Por outro lado, na Figura ??, há três ângulos de cada lado. Entretanto, note que o argumento de traçar retas paralelas pelos vértices de tais ângulos nos permite concluir que a soma das medidas dos ângulos com vértices à direita é igual à soma das medidas dos ângulos com vértices à esquerda, independentemente da quantidade de tais ângulos.

O próximo exemplo ilustra uma aplicação simples do teorema dos bicos.

**Exemplo 3.** Na figura abaixo, sabendo que  $r$  e  $s$  são retas paralelas, calcule o valor do ângulo  $x$ .



**Solução.** Pelo teorema dos bicos, temos:

$$33^\circ + 2x = 41^\circ + 30^\circ + 20^\circ.$$

Logo,

$$2x = 91^\circ - 33^\circ = 58^\circ \implies x = 29^\circ.$$

□

### Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir este material. Ressalte que é suficiente que apenas um par de ângulos alternos (ou correspondentes) seja formado por ângulos congruentes (ou, ainda, que um par de ângulos colaterais seja formado por ângulos suplementares) para que se dê o mesmo com todos os outros pares. As referências contêm mais material relacionado aos tópicos reunidos aqui.

### Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.