# Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivadas de Funções Trigonométricas

## Exercícios - Parte IV

## Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Novembro de 2024



PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Encerraremos esse módulo solucionando mais alguns problemas envolvendo o cálculo diferencial de funções trigonométricas.

# 1 Exemplos

**Exemplo 1** (OIMU - 2013). *Uma função real* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é limitada e diferenciável. Além disso, satisfaz a relação*

$$f(x)f'(x) \geq \operatorname{sen} x. \tag{1}$$

*Existe* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$*?*

**Solução.** Não. Com efeito, a desigualdade (1) significa que a função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, de regra $g(x) = f(x)^2 + 2\cos x$, é monótona não decrescente, pois

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x) - 2\operatorname{sen} x \\ &= 2(f'(x)f(x) - \operatorname{sen} x) \geq 0, \end{aligned}$$

para cada número não negativo $x$. Como $g$ é limitada, sendo uma soma de funções limitadas, a observação 10 da aula *Limites Laterais*, do módulo *Leis do limites - Parte 2*, garante a existência de $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. Portanto, se existisse $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, as regras aritméticas para limites implicariam a existência de

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x) - f(x)^2}{2} = \lim_{x\to+\infty} \cos x,$$

o que não é verdade. $\square$

**Exemplo 2.** *Para cada* $x \in (0, 1)$*, verifique a desigualdade*

$$\operatorname{sen} \pi x > \pi x(1 - x).$$

**Prova.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} \pi x - \pi x(1 - x).$$

Note que o gráfico de $f$ é simétrico em relação à reta vertical $x = 1/2$, ou seja, vale $f(1-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, lembrando que a função seno assume o mesmo valor em arcos suplementares, vem que

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \operatorname{sen}(\pi - \pi x) - \pi(1-x)[1-(1-x)] \\ &= \operatorname{sen}\pi x - \pi(1-x)x = f(x). \end{aligned}$$

Então, só precisamos provar que $f(x) > 0$ para cada $x \in (0, 1/2]$.

Para estabelecer essa desigualdade, considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \operatorname{sen}\pi x - \pi x(1-2x^2).$$

Começamos observando que

$$g(x) \le f(x), \quad \forall\, x \in [0, 1/2]. \tag{2}$$

De fato, $0 \le x \le 1/2 \Rightarrow 2x^2 \le x$, o que, por sua vez, implica

$$\begin{aligned} g(x) &= \operatorname{sen}\pi x + \pi x(2x^2 - 1) \\ &\le \operatorname{sen}\pi x + \pi x(x-1) = f(x), \end{aligned}$$

como desejado. Por outro lado,

$$g'(x) = \pi(\cos\pi x + 6x^2 - 1) \ \text{ e } \ g''(x) = \pi(-\pi \operatorname{sen}\pi x + 12x).$$

Como $\pi^2 < 3{,}2^2 = 10{,}24 < 12$ e $\operatorname{sen}\theta < \theta$ para todo $\theta > 0$, temos (com $\theta = \pi x$)

$$12x - \pi\operatorname{sen}\pi x > \pi(\pi x - \operatorname{sen}\pi x) = \pi(\theta - \operatorname{sen}\theta) > 0.$$

Portanto, $g'' > 0$ em $(0, +\infty)$, o que, com as relações $g(0) = g'(0) = 0$, permite concluir, via lema 9 da primeira parte dessa aula, a desigualdade $g > 0$, também em $(0, +\infty)$. Assim, por (2), temos que

$$0 < x \le 1/2 \Rightarrow f(x) \ge g(x) > 0,$$

encerrando a solução. $\square$

**Exemplo 3** (OBMU - 2012).

(a) *Determine o maior valor possível de* $|\operatorname{sen}^2(x)\cdot\operatorname{sen}(2x)|$, *para* $x\in\mathbb{R}$.

(b) *Prove que, para todo inteiro positivo* $k$, *se* $x=\frac{2\pi r}{2^k-1}$, *com* $r\in\mathbb{Z}$, *então*

$$\left|\prod_{j=0}^{k-1}\operatorname{sen}(2^j x)\right| = |\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)\ldots\operatorname{sen}(2^{k-1}x)| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k.$$

**Solução.** Começamos observando que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\operatorname{sen}^2(x)\cdot\operatorname{sen}(2x),$$

admite $\pi$ como período[1]. De fato, atentando à fórmula $\operatorname{sen}(x+\pi)=-\operatorname{sen}x$, vem que

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= (\operatorname{sen}(x+\pi))^2\cdot\operatorname{sen}(2(x+\pi)) \\ &= (-\operatorname{sen}(x))^2\cdot\operatorname{sen}(2x+2\pi) \\ &= \operatorname{sen}^2(x)\cdot\operatorname{sen}(2x) = f(x). \end{aligned}$$

Assim, para resolver o problema, só precisamos nos ater aos valores $|\operatorname{sen}^2(x)\cdot\operatorname{sen}(2x)|$ com $x\in[0,\pi]$.

Mais ainda, *o gráfico de* $f$ *é simétrico em relação ao ponto* $(\pi/2,0)$, ou seja, $f(\pi-x)=-f(x)$ para todo $x$ real. Realmente, usando o fato de $\pi$ ser um período de $f$ e notando que $f$ é uma função ímpar, temos

$$f(\pi-x)=f(-x)=-f(x).$$

Portanto, os valores assumidos por $|f|$ nos intervalos $[0,\pi/2]$ e $[\pi/2,\pi]$ são os mesmos. Como $|f|_{[0,\pi/2]}=f_{[0,\pi/2]}$, pois sen é não negativa no intervalo $[0,\pi]$, estamos, ao final das contas, procurando o valor máximo assumido por $f$ no intervalo $[0,\pi/2]$.

[1] Em verdade, como $f$ é positiva em $(0,\pi/2)$ e negativa em $(\pi/2,\pi)$, não é difícil concluir que $\pi$ é *o* período de $f$.

Derivando $f$, obtém-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\operatorname{sen}(x)\cos(x)\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}^2(x)\cos(2x)) \\ &= 2\operatorname{sen}^2(x)(2\cos^2(x) + \cos(2x)) \\ &= 2\operatorname{sen}^2(x)(4\cos^2(x) - 1) \\ &= 2\operatorname{sen}^2(x)(2\cos(x) + 1)(2\cos(x) - 1), \end{aligned}$$

sendo que as fórmulas $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ e $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ foram utilizadas na $2^{\underline{a}}$ e $3^{\underline{a}}$ igualdades, respectivamente.

Como a expressão $2\cos x - 1$ é positiva no intervalo $(0, \pi/3)$ e negativa no intervalo $(\pi/3, \pi/2)$, segue que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < x < \pi/3 \\ < 0, & \text{se } \pi/3 < x < \pi/2 \end{cases}.$$

Pelo teste da $1^{\underline{a}}$ derivada, $x = \pi/3$ é ponto de máximo (estrito) de $f$ restrita ao intervalo $[0, \pi/2]$.

Desse modo,

$$f(\pi/3) = \operatorname{sen}^2(\pi/3) \cdot \operatorname{sen}(2\pi/3) = (\sqrt{3}/2)^3$$

é o valor máximo de $|\operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(2x)|$ quando $x$ varia em $\mathbb{R}$.

Quanto ao item (b), primeiro note que $\operatorname{sen}(2^k x) = \operatorname{sen}(x)$. Com efeito, sendo $(2^k - 1)x = 2\pi r$, com $r \in \mathbb{Z}$, seguem as igualdades

$$\operatorname{sen}(2^k x) = \operatorname{sen}((2^k - 1)x + x) = \operatorname{sen}(2\pi r + x) = \operatorname{sen} x,$$

como queríamos.

Portanto, usando o item (a), podemos escrever as $k$ desigualdades

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(2x)| &\leq (\sqrt{3}/2)^3 \\ |\operatorname{sen}^2(2x) \cdot \operatorname{sen}(4x)| &\leq (\sqrt{3}/2)^3 \\ &\vdots \\ |\operatorname{sen}^2(2^{k-2}x) \cdot \operatorname{sen}(2^{k-1}x)| &\leq (\sqrt{3}/2)^3 \\ |\operatorname{sen}^2(2^{k-1}x) \cdot \operatorname{sen}(x)| &\leq (\sqrt{3}/2)^3. \end{aligned}$$

Percorrendo os primeiros membros das relações acima, vemos que cada fator da forma $\operatorname{sen}(2^j x)$, com $0 \leq j \leq k-1$, se repete exatamente três vezes. Daí, multiplicando tais desigualdades membro a membro, obtemos

$$\left|\prod_{j=0}^{k-1} \operatorname{sen}(2^j x)\right|^3 \leq [(\sqrt{3}/2)^3]^k = [(\sqrt{3}/2)^k]^3,$$

o que, pela extração da raiz cúbica, fornece a desigualdade desejada. $\square$

**Exemplo 4.** *Considere a função* $f : (0, 2\pi)\setminus\{\pi\} \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$f(x) = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cossec} x.$$

*Mostre que é possível definir o valor* $f(\pi)$ *de tal modo que a função resultante* $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ *seja continuamente derivável (i.e., tal que* $f$ *seja derivável e* $f'$ *seja contínua).*

**Solução.** O único valor possível para $f(\pi)$, o qual venha a tornar $f$ contínua em $\pi$, é

$$f(\pi) = \lim_{x\to\pi} f(x),$$

caso o limite exista e seja finito.

Observando que $f(x) = (\cos x + 1)/\operatorname{sen} x$ e escrevendo $x = \theta + \pi$, as relações $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}\theta$ e $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ dão

$$f(x) = \frac{\cos(\theta + \pi) + 1}{\operatorname{sen}(\theta + \pi)} = \frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{\cos\theta - 1}{\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}.$$

Portanto, segue da Regra de L'Hôpital que

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\frac{\cos\theta - 1}{\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}\right) = \frac{\cos'(0)}{\operatorname{sen}'(0)} = 0.$$

O cálculo acima mostra que, pondo $f(\pi) = 0$, a função estendida $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ é contínua. Afirmamos que essa extensão é derivável.

Naturalmente, se $x \in (0, 2\pi)$ e $x \neq \pi$, então $f$ é derivável em $x$, valendo

$$f'(x) = -(\operatorname{cossec}^2 x + \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x). \tag{3}$$

Para estabelecer a existência de $f'(\pi)$, comecemos calculando o quociente de Newton de $f$ em $\pi$, com o auxílio do cálculo de $f(x) = f(\theta + \pi)$, feito acima:

$$\frac{f(\theta+\pi) - f(\pi)}{\theta} = \frac{f(\theta+\pi)}{\theta} = \frac{\frac{\cos\theta - 1}{\theta^2}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}.$$

Em seguida, aplicando duas vezes a Regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta^2} = -1/2.$$

Portanto,

$$f'(\pi) = \lim_{\theta\to 0} \frac{f(\theta+\pi) - f(\pi)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\frac{\cos\theta - 1}{\theta^2}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}} = -1/2,$$

e $f$ é derivável em $\pi$.

Para finalizar, é preciso provar que $f' : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ é contínua. Pela fórmula (3), é claro que $f'$ é contínua em cada $x \neq \pi$. Portanto, a solução estará encerrada se mostrarmos que o limite de $f'$ em $\pi$ existe e é igual a $f'(\pi)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi} f'(x) &= -\lim_{x\to\pi} (\operatorname{cossec}^2 x + \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x) \\
&= -\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\lim_{\theta\to 0} \frac{1+\cos(\theta+\pi)}{\operatorname{sen}^2(\theta+\pi)} \\
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\frac{\cos\theta-1}{\theta^2}}{\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)^2} \\
&= \frac{-1/2}{1^2} = f'(\pi).
\end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 5.** *Sejam $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ números reais e $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$ números reais positivos e dois a dois distintos. Se*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cos k_j x = 0 \tag{4}$$

*para todo real $x$, mostre que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.*

**Solução.** Façamos uma demonstração por indução, sendo a base, $n = 1$, de fácil verificação. Supondo o enunciado verdadeiro para um certo natural $n$, tomemos números reais $a_1$, $a_2$, ..., $a_{n+1}$ e números reais positivos $k_1$, $k_2$, ..., $k_{n+1}$, dois a dois distintos, tais que

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j \cos k_j x = 0 \tag{5}$$

para todo real $x$. Derivando duas vezes o 1º membro da relação (5), obtemos

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j k_j^2 \cos k_j x = 0.$$

Subtraindo da relação acima a igualdade (5) multiplicada por $k_1^2$, vem que

$$a_2(k_2^2 - k_1^2) \cos k_2 x + \cdots + a_{n+1}(k_{n+1}^2 - k_1^2) \cos k_{n+1} x = 0$$

para cada $x$.

Pela hipótese de indução aplicada as $n$-uplas $(a_j(k_j^2 - k_1^2))_{2 \leq j \leq n+1}$ e $(k_j)_{2 \leq j \leq n+1}$, segue que $a_j(k_j^2 - k_1^2) = 0$ para todo $j \in \{2, \ldots, n+1\}$. Como $j > 1 \Rightarrow k_j^2 \neq k_1^2$, concluímos que $a_j = 0$ se $j = 2, \ldots, n+1$.

Retornando à relação (5), vemos que $a_1 \cos k_1 x = 0$ para todo $x$, o que implica $a_1 = 0$, estabelecendo o passo de indução e encerrando a solução. $\square$

Para acompanhar a solução do último exemplo, convém observar alguns pontos.

I. As sucessivas derivadas da função sen (ou cos) constituem uma sequência periódica de período 4. Reveja a proposição 2 da 1ª parte dessa aula.

II. Se a matriz de um sistema linear $n \times n$ tiver determinante não nulo, então o sistema será possível e determinado. Esse resultado compõe a chamada *regra de Cramer*, tema da seção 95 da referência [2]. Em particular, se o sistema for homogêneo (isto é, se a coluna dos termos independentes for nula), a hipótese de não anulamento do determinante da matriz do sistema implica que $(0, 0, \ldots, 0)$, a *solução trivial*, é a única solução.

III. Se um determinante $n \times n$ for tal que os termos de cada coluna constituem, ordenadamente, uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1, então esse determinante será não nulo se, e somente se, as $n$ razões dessas PG's forem todas distintas. Um determinante cujas colunas formam PG's iniciadas por 1 é dito de *Vandermonde*. Seu cálculo é deduzido na seção 86 da referência [2].

IV. Se $S$ for um conjunto finito e não vazio de números inteiros, não todos nulos, o máximo divisor comum $d$ dos elementos de $S$ pode ser escrito como uma combinação linear desses elementos, ou seja, para cada inteiro $k \in S$ existe um inteiro $m_k$ de modo que

$$d = \sum_{k \in S} k m_k.$$

Por exemplo, se $S = \{4, 6, 10\}$, então $d = \text{mdc}(4, 6, 10) = 2$ e, daí,

$$d = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot (-1).$$

(Nesse caso, nas notações introduzidas acima, temos $m_4 = 0, m_6 = 2$ e $m_{10} = -1$.) Esse é o *teorema de Bézout*, apresentado, para o caso em que $S$ tem dois elementos, no teorema 4 da aula *Relação de Bézout e Aplicações*, do módulo *Algoritmo de Euclides Estendido,* *Relações de Bézout e Equações Diofantinas.* A versão geral desse resultado pode ser encontrada, por exemplo, no teorema 13 do 1º capítulo da referência [3].

**Exemplo 6** (OBMU - 2007). *Dados números reais $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$ não todos nulos, encontre o (menor) período da função*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx.$$

**Solução.** Afirmamos que $f$ tem período igual a $2\pi/d$, sendo $d$ o mdc dos índices $k$ tais que $a_k \neq 0$. De fato, como a função cosseno tem período $2\pi$,

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi/d) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} a_k \cos(kx + 2(k/d)\pi) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx = f(x), \end{aligned}$$

ou seja, $2\pi/d$ é *um* período de $f$.

Para encerrar, precisamos mostrar que nenhum real $T$, positivo e menor que $2\pi/d$, pode ser um período de $f$. Com efeito, suponhamos o contrário e seja $T \in (0, 2\pi/d)$ um período de $f$. Observando que $\cos^{(2j-1)} = (-1)^j \operatorname{sen}$ (graças à observação I acima), obtemos

$$\begin{aligned} &f^{(2j-1)}(x) = \\ &= (-1)^j (a_1 \operatorname{sen} x + 2^{2j-1} a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + n^{2j-1} a_n \operatorname{sen} nx). \end{aligned}$$

Derivando $2j - 1$ vezes a relação $f(x + T) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, segue que $f^{(2j-1)}(x + T) = f^{(2j-1)}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $f^{(2j-1)}(T) = f^{(2j-1)}(0) = 0$, ou seja,

$$a_1 \operatorname{sen} T + 2^{2j-1} a_2 \operatorname{sen} 2T + \cdots + n^{2j-1} a_n \operatorname{sen} nT = 0,$$

para todo $j$ natural. Fazendo $j = 1, 2, \ldots, n$, obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_1 \operatorname{sen} T + 2a_2 \operatorname{sen} 2T + \ldots + na_n \operatorname{sen} nT & = 0 \\ a_1 \operatorname{sen} T + 2^3 a_2 \operatorname{sen} 2T + \ldots + n^3 a_n \operatorname{sen} nT & = 0 \\ & \vdots \\ a_1 \operatorname{sen} T + 2^{2n-1} a_2 \operatorname{sen} 2T + \ldots + n^{2n-1} a_n \operatorname{sen} nT & = 0 \end{cases},$$

o qual pode ser escrito em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1^1 & 2^1 & \ldots & n^1 \\ 1^3 & 2^3 & \ldots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2n-1} & 2^{2n-1} & \ldots & n^{2n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \operatorname{sen} T \\ a_2 \operatorname{sen} 2T \\ \vdots \\ a_n \operatorname{sen} nT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que a matriz do sistema anterior tem determinante não nulo. Admitindo essa afirmação por enquanto, segue da regra de Cramer que a matriz coluna à esquerda da igualdade matricial acima deve ser nula (graças à observação II), ou seja, temos $a_k \operatorname{sen} kT = 0$ para todo $k$ de 1 a $n$. Daí, conclui-se que $\operatorname{sen} kT = 0$ sempre que $a_k \neq 0$. Assim, para tais $k$, devemos ter $kT = l_k \pi$, sendo $l_k$ um inteiro.

Todavia, o teorema de Bézout (observação IV) permite escrever $d = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} km_k$, para certos inteiros $m_k$, de modo que

$$dT = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} (kT)m_k = \Bigg( \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} l_k m_k \Bigg) \pi = r\pi,$$

sendo $r = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ a_k \neq 0}} l_k m_k$ um inteiro. Note que $r$ é positivo, já que $d$ e $T$ o são. Logo, $T = \frac{r}{2} \cdot \frac{2\pi}{d}$, o que implica $r = 1$, pois estamos supondo $T < 2\pi/d$. Daí, $\pi/d$ é um período de $f$.

Observando que, caso $d$ divida $k$, tem-se

$$\cos(k(x + \pi/d)) = \cos(kx + (k/d)\pi) = \pm \cos kx,$$

em que os sinais $+$ ou $-$ são utilizados conforme $k/d$ seja par ou ímpar, a igualdade $f(x+\pi/d) = f(x)$ implica

$$\begin{aligned} f(x+\pi/d) &= \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ a_k\neq 0 \\ k/d \text{ par}}} a_k \cos kx - \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ a_k\neq 0 \\ k/d \text{ ímpar}}} a_k \cos kx \\ &= \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ a_k\neq 0 \\ k/d \text{ par}}} a_k \cos kx + \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ a_k\neq 0 \\ k/d \text{ ímpar}}} a_k \cos kx = f(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ a_k\neq 0 \\ k/d \text{ ímpar}}} a_k \cos kx = 0 \tag{6}$$

para todo real $x$. (Note que os números $k/d$, para todos os índices $k$ tais que $a_k \neq 0$, são primos entre si, de sorte que pelo menos um deles é ímpar, o que garante a existência do último somatório.)

Porém, o exemplo 5 assegura que a identidade (6) só pode ocorrer se todos os $a_k$ ali forem iguais a 0, o que é uma contradição. Desse modo, fica provado que $2\pi/d$ é *o* período da função $f$.

Para o que falta, precisamos verificar que o determinante da matriz $n \times n$ acima é não nulo. Realmente, essa matriz nada mais é que a matriz de Vandermonde dos números $1^2, 2^2, \ldots, n^2$, cujo determinante $D$ é diferente de zero (vide a observação III), com a $j$-ésima coluna multiplicada por $j$, para cada $1 \leq j \leq n$. Portanto, o determinante procurado é $n!D \neq 0$, como desejado. $\square$

## Dicas para o Professor

Pode ser interessante discutir a seguinte versão mais precisa do exemplo 2 com sua turma: *mostre que, para cada número real $x$,*

$$\operatorname{sen} \pi x \geq \pi x(1-x),$$

*com igualdade se, e somente se,* $x = 0$ *ou* $x = 1$.

Pela simetria da função $f(x) = \operatorname{sen} \pi x - \pi x(1 - x)$ apontada na solução daquele exemplo, falta apenas mostrar que $f(x) > 0$ para todo $x < 0$. Daqui, o leitor poderá completar o argumento observando que $x < 0$ implica as relações $1 - x > 1$ e $-|\operatorname{sen} \pi x| > \pi x$.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

2. G. Iezzi, S. Hazzan. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol.* 4. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol.* 5*. Teoria dos Números.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2014.