Material Teórico - Módulo Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau

Introdução às inequações de primeiro grau

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Inequações

Em módulos anteriores, já nos deparamos com alguns problemas sobre inequações. Neste módulo, vamos fazer um estudo sistemático deste tema.

Nesta aula vamos rever inequações de primeiro grau, abordando este assunto com uma nova roupagem. Mais precisamente, discutiremos um procedimento conhecido como *estudo da variação do sinal*, ou simplesmente, *estudo do sinal*. Em aulas seguintes, estudaremos as chamadas *inequações produto*, as *inequações quociente* e certos *sistemas de inequações*.

Comecemos analisando o exemplo a seguir.

Exemplo 1 (PUC). *Fábio quer arrumar um emprego de modo que, do total do salário que receber, possa gastar* $1/4$ *com alimentação,* $2/5$ *com aluguel e* R\$ 300,00 *em roupas e lazer por mês. Descontadas todas essas despesas, ele ainda pretende que sobre, no mínimo,* R\$ 85,00*. Para que suas pretensões sejam atendidas, seu salário deve ser no mínimo quanto?*

Solução. Vamos representar pela letra s o valor do salário que Fábio irá receber. As despesas dele totalizam o valor

$$\frac{s}{4}+\frac{2s}{5}+300,$$

sendo $s/4$ correspondente ao que ele irá gastar com alimentação, $2s/5$ ao que ele gastará com aluguel e R\$ 300,00 a gastos com roupas e lazer. Após realizadas essas despesas, Fábio ficará com

$$s-\left(\frac{s}{4}+\frac{2s}{5}+300\right).$$

Mas, como ele pretende que sobre no mínimo 85 reais, a seguinte inequação precisa ser satisfeita:

$$s-\left(\frac{s}{4}+\frac{2s}{5}+300\right)\geq 85.$$

Distribuindo o sinal $-$ no lado esquerdo dessa inequação, ficamos com

$$\left(s-\frac{s}{4}-\frac{2s}{5}\right)-300\geq 85.$$

Na inequação acima, o número entre parênteses, subtraído de 300, deve ser pelo menos 85. Desse forma, tal número deve ser pelo menos 385, ou seja,

$$s-\frac{s}{4}-\frac{2s}{5}\geq 385.$$

Agora, vamos simplificar o lado esquerdo, reduzindo as frações a um denominador comum. Como o mínimo múltiplo comum de 4 e 5 é igual a 20, temos que

$$\frac{20s}{20}-\frac{5s}{20}-\frac{8s}{20}\geq 385 \implies \frac{7s}{20}\geq 385.$$

Por fim, multiplicando ambos os lados por $20/7$, obtemos $s\geq 385\cdot\frac{20}{7}=1100$. Logo, Fábio precisa ganhar pelo menos R\$ 1100,00. □

É importante relembrar que o trabalho com inequações requer mais cuidado do que o trabalho com equações. Isso porque algumas manipulações que fazemos com frequência com equações nem sempre podem ser realizadas com inequações. Contudo, algo que podemos fazer normalmente é somar ou subtrair um mesmo valor a ambos os lados da inequação (como fizemos no exemplo anterior). Em particular, lembre-se de que cancelar uma parcela comum aos dois lados de uma inequação (ou de uma equação), corresponde a subtrair tal parcela de ambos os lados; assim, isso pode ser feito sem problemas.

Exemplo 2. *Se quisermos simplificar a inequação*

$$3x+8>2x+29,$$

podemos primeiro subtrair 8 *de ambos os lados (o que corresponde a "passar o 8" para o outro lado com sinal invertido), obtendo*

$$3x>2x+21.$$

Em seguida, subtraímos $2x$ *de ambos os lados para obter*

$$3x-2x>21.$$

O resultado,

$$x>21,$$

é uma inequação equivalente à original.

Observação 3. *Esse exemplo poderia ter sido resolvido em um único passo subtraindo-se* $2x+8$ *de ambos os lados.*

Ao multiplicar ou dividir ambos os lados de uma inequação por um determinado número (o que também fizemos ao final da solução do Exemplo 1), é preciso tomar o cuidado de verificar se esse número é positivo, negativo ou zero (no caso de equações basta verificar que o número é diferente de zero).

Quando o número for positivo, não há problema algum. Mas, quando ele for negativo, é necessário *inverter* o sinal da desigualdade. Por exemplo, se soubermos que $3x+6\geq 9$, podemos dividir normalmente ambos os lados por 3, pois 3 é positivo, para obter $x+2\geq 3$. Disso, conclui-se que $x\geq 1$. Mas, se $-3y+6\geq -9$, então, como -3 é negativo, ao dividirmos ambos os lados por -3 o resultado obtido será $y-2\leq 3$ (observe que, além de inverter os sinais do 6 e do 9, o símbolo "$\geq$" passou a ser "$\leq$"). Disso, conclui-se que $y\leq 5$.

Lembre-se de que *cancelar* um fator comum a dois lados de uma inequação (ou de uma equação) corresponde a *dividir* ambos os lados da inequação (ou equação) por tal fator. Assim, quando o fator for negativo, devemos inverter o sinal da inequação e, quando o fator for zero, não é permitido fazer o cancelamento.

A seguir, exercitamos as observações acima.

Exemplo 4. *Resolva cada uma das inequações abaixo, sabendo que x pertence ao conjunto universo U dado:*

(a) $3x - 1 \geq x + 9$, *com* $U = \mathbb{N}$.

(b) $4(x - 3) < 5(1 - x)$, *com* $U = \mathbb{Z}$.

(c) $20 - (2x + 5) \leq \frac{11}{2} + 8x$, *com* $U = \mathbb{Q}$.

(d) $(5 - x)(7 + x) > 3x - x^2$, *com* $U = \mathbb{R}$.

Solução.
(a) Subtraindo x de ambos os lados, a fim de eliminar a variável x do lado direito da equação, obtemos:

$$2x - 1 \geq 9.$$

Agora, somando 1 a ambos os lados, ficamos com

$$2x \geq 10.$$

Como $2 > 0$, podemos dividir os dois lados por 2 para obter $x \geq 5$. Logo, x é qualquer número do universo dado (o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais), maior ou igual a cinco. Dessa forma, o conjunto solução é

$$S = \{5, 6, 7, \ldots\}.$$

(b) A inequação do enunciado equivale a

$$4x - 12 < 5 - 5x.$$

Este formato facilita o passo seguinte, que, como no item anterior, tem o objetivo de fazer com que todas as ocorrências da variável x estejam num mesmo lado da inequação, enquanto os termos independentes fiquem do outro lado. Para isso, uma possibilidade é somar $5x+12$ a ambos os lados, o que fornece

$$(4x - \cancel{12}) + (5x + \cancel{12}) < (5 - \cancel{5x}) + (\cancel{5x} + 12)$$

ou, ainda,

$$9x < 17.$$

Dividindo ambos os lados por 9, chegamos a $x < 17/9$. Agora, perceba que o enunciado também diz que x deve ser um número *inteiro*. Então, como $17/9 = 1{,}888\ldots$, segue que $x \leq 1$. Sendo assim, x é qualquer inteiro menor ou igual a 1, e o conjunto solução é

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\} = \{1, 0, -1, -2, \ldots\}.$$

(c) Inicialmente, simplificando o lado esquerdo da inequação, temos:

$$15 - 2x \leq \frac{11}{2} + 8x.$$

Argumentando como em (b) (dessa vez somando $-8x - 15$ a ambos os lados), ficamos com

$$-2x - 8x \leq \frac{11}{2} - 15,$$

o que, por sua vez, equivale a

$$-10x \leq -\frac{19}{2}.$$

Agora, lembre-se de que, ao dividirmos ambos os lados por -10, precisamos inverter o sinal de desigualdade. Assim fazendo, obtemos

$$x \geq \frac{19}{20}.$$

Por fim, como x é um número racional (pois este foi o universo dado no enunciado), temos que o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{19}{20}\right\}.$$

(d) Desenvolvendo o produto do lado esquerdo, temos

$$35 + 5x - 7x - x^2 > 3x - x^2.$$

e, daí (cancelando a parcela $-x^2$ de ambos os lados),

$$35 - 2x > 3x.$$

Dessa vez, somamos $2x$ a ambos os lados (não há nada de especial no lado esquerdo; podemos muito bem deixar todas as ocorrências de x no lado direito), chegando a

$$35 > 5x.$$

Então, dividindo os dois lados por 7, ficamos com

$$7 > x$$

ou, o que é o mesmo,

$$x < 7.$$

Uma vez que nosso universo, nesse caso, é o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais, o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\} = (-\infty, 7).$$

$\square$

2 Estudo da variação de sinal

Estudar o sinal de uma função f significa descobrir os valores da variável x (pertencentes ao domínio de f e) que tornam $f(x)$ positivo, negativo ou zero. De outra forma, analisar o sinal de $f(x)$ é o mesmo que encontrar os conjuntos soluções das inequações $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$, bem como da equação $f(x) = 0$.

Nesta seção, vamos considerar que o conjunto universo é sempre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Quanto ao domínio de cada função tratada aqui, suporemos que ele é o *maior conjunto de reais* para o qual a *lei de formação* da função está bem definida.

A análise de sinal de uma função de primeiro grau é simples, pois o sinal muda exatamente uma vez, à medida que a variável x percorre o conjunto dos reais. Mais adiante, quantificaremos essa afirmação de maneira mais precisa. Por ora, é conveniente começar examinando um par de exemplos numéricos.

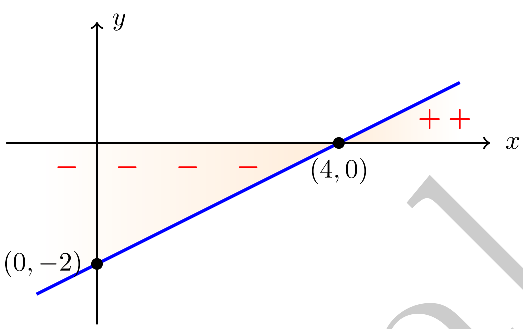
Exemplo 5. *Analise o sinal da função real f, dada por $f(x) = 0{,}5x - 2$.*

Solução. Primeiramente, veja que:

$$f(x) = 0 \iff 0{,}5x - 2 = 0 \iff 0{,}5x = 2 \iff x = 4.$$

Agora, perceba que f é um função afim, pois é da forma $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$; neste exemplo, temos $a = 0{,}5$ e $b = -2$.

O gráfico de uma função afim é uma reta e, como o coeficiente de x é positivo, o valor $f(x)$ cresce à medida que x cresce. Então, para desenhá-lo, basta encontrar dois pontos do gráfico. Pelo que vimos acima, quando $f(x) = 0$ temos $x = 4$; logo, a reta passa pelo ponto $(4, 0)$. Ademais, quando $x = 0$, temos $f(0) = 0{,}5 \cdot 0 - 2 = -2$; logo, a reta passa pelo ponto $(0, -2)$. Podemos, pois, desenhar o gráfico como segue:



Perceba que, para todos os valores de x menores que 4, a porção correspondente do gráfico de f (a reta azul, na figura acima) está situada abaixo do eixo-x, de forma que $f(x)$ é negativo para $x < 4$. Por outro lado, para os valores de x maiores que 4, a porção correspondente do gráfico está acima do eixo-x, logo, $f(x)$ é maior que zero para $x > 4$.

Concluímos, então, que:

- $f(x) < 0$ quando $x < 4$;
- $f(x) = 0$ quando $x = 4$;
- $f(x) > 0$ quando $x > 4$.

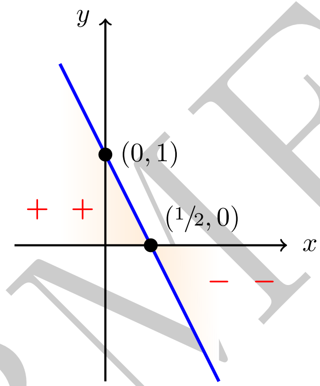
□

O próximo exemplo traz uma função de primeiro grau cujo coeficiente de x é negativo. Nessa circunstância, teremos uma função *decrescente*, o que inverterá os intervalos nos quais a função é positiva ou negativa.

Exemplo 6. *Analise o sinal da função $f(x) = -2x + 1$.*

Solução. Como antes, começamos resolvendo a equação $f(x) = 0$, o que nos dá $x = 1/2$. Logo, o ponto $(1/2, 0)$ está no gráfico da função. Além disso, fazendo $x = 0$ obtemos $f(0) = 1$, de modo que o ponto $(0, 1)$ também está no gráfico.

Agora, uma vez que $f(x) = -2x + 1$ também é uma função afim, basta traçar a reta que passa pelos pontos $(1/2, 0)$ e $(0, 1)$, como na figura seguinte:



Neste caso, temos que:

- $f(x) < 0$ quando $x > 1/2$;
- $f(x) = 0$ quando $x = 1/2$;
- $f(x) > 0$ quando $x < 1/2$.

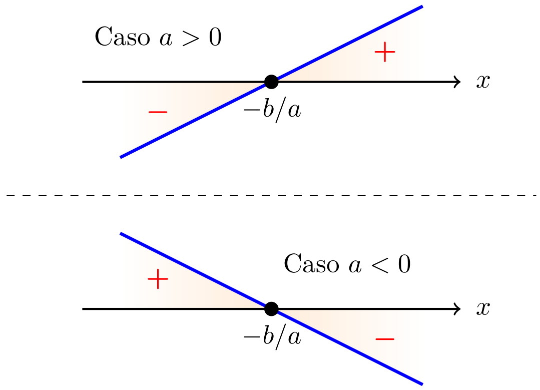
□

Observe, pelos dois exemplos anteriores, que o mais importante é, na verdade, obter o ponto onde a função é zero e decidir se a reta que representa o gráfico está *subindo* ou *descendo*, à medida que o valor de x aumenta. Conforme observamos nos exemplos, quando ela está subindo dizemos que a função é crescente e quando está descendo dizemos que ela é decrescente.

Na prática, para funções afins, o crescimento ou decrescimento pode ser determinado simplesmente olhando para o sinal do coeficiente de x:

- quando $f(x) = ax + b$ e $a > 0$ temos que a função é crescente (pois quando x aumenta em uma unidade o valor de $f(x)$ aumenta em a unidades);
- quando $a < 0$, temos que a função é decrescente;
- por fim, igualando $f(x)$ a 0, obtemos
$$ax + b = 0 \iff x = -b/a.$$

Logo, temos uma das duas situações da figura a seguir. Aqui não desenhamos o eixo-y, pois o ponto exato onde o gráfico corta o eixo-y não é relevante para a nossa análise. Por outro lado, marcamos as regiões em que $f(x)$ é negativo ou positivo.



Será conveniente expressar os dados dos gráficos acima no formato de uma tabela, similar às seguintes. Na primeira linha, colocamos o(s) valor(es) de x para o qual(is) a função é zero; no caso da função afim $f(x) = ax + b$, temos apenas o valor $-b/a$. Na segunda linha, indicamos que função estamos analisando e em quais intervalos da reta ela é positiva ou negativa.

		$-b/a$		x
$ax + b$ caso $a > 0$	$-$	0	$+$	

		$-b/a$		x
$ax + b$ caso $a < 0$	$+$	0	$-$	

Esse tipo de tabela facilitará bastante o desenvolvimento das próximas aulas, onde estudaremos os sinais de duas ou mais funções ao mesmo tempo.

Nesse formato, a informação do gráfico do Exemplo 6 seria escrita como abaixo:

		$1/2$		x
$-2x + 1$	$+$	0	$-$	

Exemplo 7. *Estude os sinais das funções* $f(x) = 2x - 1$ *e* $g(x) = -3x + 2$.

Solução. Temos que $f(x)$ é uma função afim, com

$$2x - 1 = 0 \iff 2x = 1 \iff x = 1/2.$$

Como o coeficiente de x é positivo, a função é crescente, ou seja, $f(x)$ aumenta à medida que x aumenta. Sendo assim, para valores de x menores que $1/2$, temos que $f(x)$ será negativo, enquanto que, para valores de x maiores que $1/2$, temos que $f(x)$ será positivo.

Esses dados podem ser exibidos de forma compacta na seguinte tabela:

		$1/2$		x
$2x - 1$	$-$	0	$+$	

A função $g(x) = -3x + 2$ também é uma função afim, tal que

$$-3x + 2 = 0 \iff -3x = -2 \iff x = 2/3.$$

Entretanto, dessa vez o coeficiente de x é negativo, de forma que a função é decrescente, ou seja, quanto maior o valor de x menor será o valor de $g(x)$. Com isso, para $x < 2/3$ temos que $g(x) > 0$ e para $x > 2/3$ temos que $g(x) < 0$.

Novamente, esses dados podem ser exibidos de forma compacta na seguinte tabela:

		$2/3$		x
$-3x + 2$	$+$	0	$-$	

$\square$

3 Revisitando a resolução de inequações

Uma variação simples de inequações é uma $f(x) \geq 0$. Matematicamente, o fato de querermos encontrar os valores de x para os quais $f(x)$ seja *maior ou igual a zero* significa que estamos à procura da ocorrência de *uma qualquer* das possibilidades $f(x) > 0$ ou $f(x) = 0$. De outra forma, tais casos *não excluem* um ao outro.

Assim, os valores de x que *não satisfazem* $f(x) \geq 0$ são justamente os que satisfazem $f(x) < 0$. Desse modo, ao resolvermos a equação $f(x) = 0$ e a inequação $f(x) \geq 0$ acabamos fazendo (indiretamente) uma análise do sinal de $f(x)$.

Em termos de conjunto solução para a inequação $f(x) \geq 0$, devemos tomar o conjunto solução da inequação $f(x) > 0$, o conjunto solução da equação $f(x) = 0$ e, em seguida, *unir* os dois. Evidentemente, observações análogaas são válidas para inequações da forma $f(x) \leq 0$.

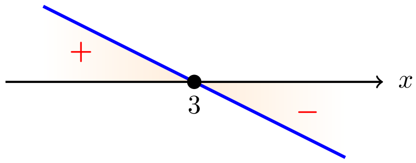
Vejamos um

Exemplo 8. *Resolva a inequação* $6 - 2x \geq 0$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Vamos estudar o sinal da função $g(x) = 6 - 2x$. Primeiro, igualamos a função a zero, obtendo:

$$g(x) = 0 \iff 6 - 2x = 0 \iff -2x = -6 \iff x = 3.$$

Agora, observe que o coeficiente de x é igual a -2, que é negativo; sendo assim, a função g é decrescente. A figura seguinte mostra parte do gráfico de $g(x)$ (omitindo o eixo-y).



Concluímos, pois, que:

- $f(x) > 0$ quando $x < 3$,
- $f(x) = 0$ quando $x = 3$ e
- $f(x) < 0$ quando $x > 3$.

Em particular, veja que a resposta da inequação do enunciado é dada pelo conjunto solução

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} \cup \{3\} = (-\infty, 3].$$

□

Dicas para o Professor

Inequações de primeiro grau são bastante simples, de forma que é possível apresentar o assunto desta aula em um único encontro. A diferença crucial entre inequações e equações de primeiro grau é que devemos tomar o cuidado de, ao multiplicar ambos os lados por um número negativo, inverter o sinal da inequação. Isso deve ser bastante enfatizado.

A resolução de inequações por intermédio da análise do sinal da função afim correspondente acaba sendo mais trabalhosa do que a resolução de forma direta (algébrica). Contudo, entender esse procedimento é um passo importante, pois ele será muito útil quando o problema for generalizado para inequações de segundo grau, inequações produto, inequações quociente ou sistemas de inequações.

As referências listadas abaixo contêm muito mais material sobre inequações e desigualdades.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.