Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 1

Introdução aos Limites

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

06 de junho de 2020

1 Tangentes a cônicas e cúbicas

Ao estudarmos as posições relativas entre retas e círculos, aprendemos que existem três possibilidades para a posição relativa de uma reta ℓ em relação a um círculo C (Figura 1):

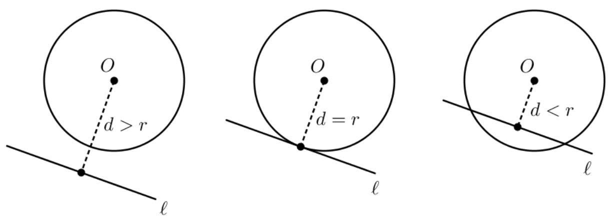

Figura 1: as três posições relativas de uma reta em relação a um círculo.

Seja d a distância do centro O do círculo até a reta ℓ e seja r o raio do círculo. Se $d > r$ (situação à esquerda, na figura acima), dizemos que a reta é **externa** ao círculo; neste caso, não há pontos em comum entre ℓ e C. Se $d = r$ (situação do centro, na figura acima), então ℓ e C têm exatamente um ponto em comum; neste caso, dizemos que ℓ é **tangente** ao círculo C. Finalmente, se $d < r$ (situação à direita, na figura acima), a reta ℓ tem dois pontos em comum com o círculo; dizemos que a reta ℓ é **secante** ao círculo C.

Pensando em termos de equações, se um ponto $P = (x, y)$ pertence à reta ℓ e ao círculo C, então as coordenadas de P satisfazem as equações de ambos ℓ e C, ou seja:

$$\left\{\begin{array}{rcl}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 & = & r^2\\ ax+by+c & = & 0\end{array}\right. . \qquad (1)$$

Resolvendo esse sistema (por exemplo, calculando o valor de x em função de y na segunda equação e o substituindo na primeira equação), encontramos uma equação quadrática, e o sinal do discriminante Δ vai determinar a posição relativa da reta e do círculo: se $\Delta < 0$, então a equação quadrática resultante do sistema, e portanto o próprio sistema, não tem solução, ou seja, a reta e o círculo não têm pontos em comum. Se $\Delta = 0$, então o sistema tem solução única, ou seja, a reta e o círculo têm exatamente um ponto em comum, ou seja, são tangentes. Por fim, se $\Delta > 0$, então o sistema tem duas soluções distintas e a reta é secante ao círculo. Vejamos um exemplo numérico.

Exemplo 1. *Obtenha a reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e paralela à reta $x + 2y = 3$.*

Solução. Uma reta que tenha a mesma direção que a reta de equação $x + 2y = 3$, é uma reta de equação $x + 2y = c$, para algum parâmetro real c. O valor de c determina a posição da reta, de modo que, quando c varia nos reais, obtemos um feixe de retas paralelas, todas com a mesma direção da reta inicial, $x + 2y = 3$.

Dentre todas essas retas, procuramos as que são tangentes ao círculo dado. Para tanto, resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl}x^2+y^2-2y & = & 0\\ x+2y & = & c\end{array}\right.$$

encontramos $(c - 2y)^2 + y^2 - 2y = 0$, isto é, $c^2 - 4cy + 4y^2 + y^2 - 2y = 0$, que é equivalente a

$$5y^2 - (4c + 2)y + c^2 = 0.$$

Para que a reta seja tangente ao círculo, o discriminante dessa última equação deve ser igual a zero, ou seja,

$$\Delta = (4c + 2)^2 - 20c^2 = 0.$$

Desenvolvendo, obtemos $16c^2 + 16c + 4 - 20c^2 = 0$, isto é, $c^2 - 4c - 1 = 0$. Logo, $c = 2 \pm \sqrt{5}$. Esses parâmetros fornecem duas retas tangentes ao círculo dado. □

Sabemos que a equação de uma cônica no plano cartesiano é um polinômio de grau dois em duas indeterminadas. O procedimento que acabamos de estudar serve, então, para qualquer cônica (não degenerada).

Exemplo 2. *Alguma reta que passa pelo ponto $(2, 1)$ tangencia a hipérbole $y^2 - x^2 = 2$?*

Solução. Uma reta que passa pelo ponto $(2, 1)$ tem equação $y - 1 = m(x - 2)$, onde m é o coeficiente angular da reta e determina sua direção.

Para descobrirmos se essa reta tem pontos em comum com a hipérbole, devemos resolver o sistema formado pelas equações da reta e da hipérbole. Fazendo isso, obtemos $(m(x - 2) + 1)^2 - x^2 = 2$, ou seja, $m^2(x^2 - 4x + 4) + 2m(x - 2) + 1 - x^2 - 2 = 0$. Simplificando, ficamos com

$$(m^2 - 1)x^2 + 2m(1 - 2m)x + (4m^2 - 4m - 1) = 0.$$

A condição de tangência implica que $\Delta = 0$, isto é, $4m^2(1 - 2m)^2 - 4(m^2 - 1)(4m^2 - 4m - 1) = 0$. Desenvolvendo e simplificando essa última expressão, obtemos $4m^2(4m^2-4m+1)-4m^2(4m^2-4m-1)+4(4m^2-4m-1) = 0$, ou seja,

$$6m^2 - 4m - 1 = 0.$$

Logo,

$$m = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{12} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{6},$$

de sorte que existem duas retas que passam pelo ponto $(2, 1)$ e são tangentes á hipérbole $y^2 - x^2 = 2$. Cada uma dessas retas tangencia um dos ramos da hipérbole; ambas são mostradas na Figura 2. □

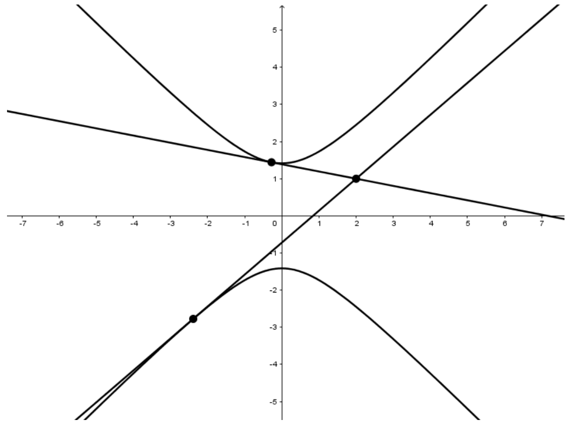

Figura 2: retas tangentes à hipérbole $y^2 - x^2 = 2$ passando pelo ponto $(2,1)$.

Um polinômio de grau 2 em duas indeterminadas define uma cônica plana. O estudo das cônicas foi empreendido, geometricamente, por Apolônio de Perga (262–190 aC), ainda na Antiguidade Clássica grega.

Um polinômio de grau 3, em duas indeterminadas, define outro tipo de curva no plano, chamada **cúbica**. O primeiro estudo sistemático sobre as cúbicas foi feito por Sir Isaac Newton (1643–1727) em seu tratado *Enumeratio linearum tertii ordinis* (Enumeração das linhas de terceira ordem), publicado em 1704 mas escrito por volta de 1676. A seguir, veremos um exemplo simples de reta tangente a uma cúbica.

Exemplo 3. *Considere a curva C cuja equação é $xy = x^2 - 4x^2 + 6x - 2$. Encontre os pontos onde reta horizontal ℓ, de equação $y = 1$, cruza a curva C.*

Solução. Fazendo $y = 1$ na equação da curva, obtemos $x = x^3 - 4x^2 + 6x - 2$, ou seja,

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0. \tag{2}$$

Por inspeção, vemos que uma das raízes dessa equação é $x = 1$. Dividindo o polinômio $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $x - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 &= (x-1)(x^2 - 3x + 2) \\ &= (x-1)^2(x-2). \end{aligned}$$

Isso significa que $x = 1$ é uma *raiz dupla* e $x = 2$ é uma *raiz simples* dessa equação, isto é, a reta ℓ tem um "contato de ordem 2" com a curva C no ponto $P = (1,1)$, enquanto a reta ℓ tem um "contato de ordem 1" com a curva no ponto $Q = (2,1)$. Veja a diferença entre tais situações na Figura 3.

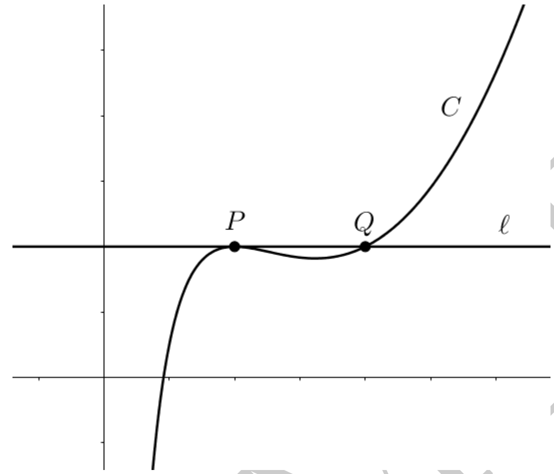

Figura 3: a reta ℓ e os dois pontos em que ela entra em contato com a curva C.

Para entendermos o que significa um "contato de ordem 2", vamos considerar uma reta secante s, a princípio situada um pouco abaixo da reta ℓ. Vamos fazer a reta s subir de modo que a tenda a ocupar a posição da reta ℓ (Acompanhe o raciocínio na Figura 4, a qual foi ampliada para melhor compreensão).

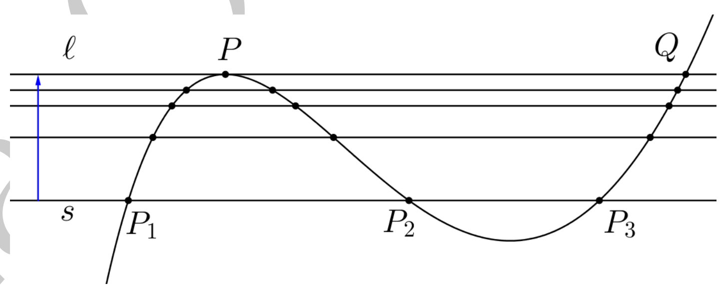

Figura 4: a reta s movimenta-se para cima, tendendo a ocupar a posição da reta ℓ.

Na sua posição inicial, a reta s encontra a curva C em três pontos distintos, P_1, P_2 e P_3. À medida em que a reta s se aproxima da reta ℓ, os pontos P_1 e P_2 se aproximam do ponto P, enquanto o ponto P_3 se aproxima do ponto Q.

Dessa forma, podemos ver o ponto P como um ponto *para onde os pontos P_1 e P_2 convergem* à medida que a reta s se aproxima da reta ℓ. Isso se reflete na multiplicidade do número 1, abscissa do ponto P, como raiz da equação (2). Por outro lado, quando a reta s se aproxima da reta ℓ, apenas o ponto P_3 converge para o ponto Q. Isso se reflete no fato de 2 ser uma raiz de (2) com multiplicidade 1. □

Observação 4. *Resumindo o que acabemos de fazer, no Exemplo 3 a reta ℓ intersecta a cúbica C em dois pontos, P e Q, sendo que, no ponto P, ela é tangente e no ponto Q ela não é tangente. O que caracteriza a tangência de ℓ a C em P é o fato de que, no ponto P, o contato entre a reta e a cúbica é de ordem 2, enquanto que, em Q, o contato é* *de ordem* 1. *Isso pode ser entendido, como fizemos acima, da seguinte maneira: se movermos a reta* ℓ *um pouco para baixo, obteremos uma reta* s *que corta a cúbica* C *em três pontos,* P_1*,* P_2 *e* P_3*, sendo que o ponto* P*, em* ℓ*, corresponde aos* dois *pontos* P_1 *e* P_2*, enquanto o ponto* Q *em ell corresponde a apenas um ponto,* P_3*, em* s*.*

2 A tangente ao gráfico de uma função

Vamos considerar, nesta seção, uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Suponha que, para $x_0, x \in I$, com $x \neq x_0$, possamos calcular a razão

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{3}$$

Vamos avaliar o que ocorre com essa fração quando x se aproxima de x_0, e interpretar o significado geométrico dessa razão.

Sejam $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x, f(x))$ dois pontos do gráfico de f e suponha que possamos aproximar x de x_0. Na Figura 5, temos $x_0 < x$, o que faz o ponto P aparecer à direita do ponto P_0; também poderíamos ter $x < x_0$, o que faria o ponto P aparecer à esquerda do ponto P_0.

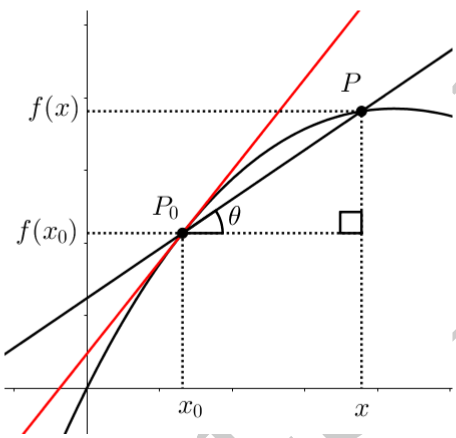

Figura 5: a reta tangente ao gráfico de f no ponto P_0 e uma reta secante, passando por P_0 e P.

Podemos pensar nas abscissas x_0 e x como soluções do sistema formado pela equação da reta que passa por P_0 e P e pela equação $y = f(x)$, que determina o gráfico da função f.

À medida em que x se aproxima de x_0, o ponto P se aproxima do ponto P_0. Se f for uma função polinomial, então as duas raízes, x e x_0, podem ser vistas, aproximadamente, como uma só raiz dupla da equação resultante do sistema considerado acima. Neste caso, pelo que discutimos anteriormente, podemos concluir que a reta secante ao gráfico, passando por P_0 e P, se aproxima da posição de tangência ao gráfico de f no ponto P_0, representada na Figura 5 pela reta vermelha.

No caso geral, em que a função f não é, necessariamente, uma função polinomial, queremos garantir a aproximação entre reta secante e reta tangente, quando o ponto P se aproxima do ponto P_0. Essa aproximação depende de uma certa *homogeneidade* no comportamento de $m(x)$ nas proximidades do ponto x_0, que vamos esclarecer mais adiante.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ é

$$y - f(x_0) = m(x - x_0). \tag{4}$$

Como já conhecemos as coordenadas de P_0, para determinarmos essa equação precisamos conhecer m. Se s é a reta determinada pelos pontos P_0 e $P = (x, f(x))$, então o seu coeficiente angular é igual à tangente do ângulo θ, ou seja, é

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m(x).$$

Observemos que $m(x_0)$ não tem sentido, pois a substituição de x por x_0 na expressão (3) anularia o numerador e também o denominador. Isso significa que não podemos calcular m diretamente. Para fazer isso, vamos assumir que a razão $m(x)$ tem a seguinte *propriedade de homogeneidade*:

> Podemos fazer com que $m(x)$ se aproxime de m, com o **grau de precisão desejado**, desde que possamos escolher x **suficientemente próximo** de x_0.

As duas expressões em negrito são fundamentais para a compreensão do conceito de limite. Veja que não afirmamos *apenas* que $m(x)$ fica próximo de m quando x fica próximo de x_0. Mais do disso, podemos fazer com que $m(x)$ fique *arbitrariamente* próximo de m, desde que x esteja *suficientemente próximo de* x_0.

O que, exatamente, significa a discussão do parágrafo anterior? Primeiramente, "ficar próximo" significa que a distância entre $m(x)$ e m pode ser controlada, desde que a distância entre x e x_0 também seja controlada. Essas distâncias são dadas pelos valores absolutos das diferenças: $|m(x) - m|$ e $|x - x_0|$. A presença do valor absoluto (ou módulo) evita que precisemos considerar dois casos, quando $m(x)$ é menor ou maior do que m, e também quando x é maior ou menor do que x_0.

Ficar *arbitrariamente* próximo significa que $|m(x) - m|$ pode tornar-se *tão pequeno quanto desejarmos*, desde que $|x - x_0|$ seja suficientemente pequeno, ou seja, se for dado um número $\varepsilon > 0$, queremos garantir que $|m(x) - m| < \varepsilon$, para uma escolha apropriada de x. O número positivo ε funciona como uma *exigência* de proximidade entre $m(x)$ e m. A *garantia* para que $m(x)$ cumpra a condição de proximidade em relação a m é dada por um número positivo

δ, da seguinte maneira: se $|x - x_0| < \delta$, ou seja, se x estiver suficientemente próximo de x_0, então $|m(x) - m| < \varepsilon$, ou seja, $m(x)$ estará próximo de m, dentro da condição exigida.

Costumamos resumir as ideias acima escrevendo, esquematicamente,

Para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$, então $|m(x) - m| < \varepsilon$.

Quando pudermos garantir, para cada exigência de proximidade ε, a existência de um número positivo δ satisfazendo a condições acima, dizemos que *o limite de $m(x)$, quando x tende a x_0, é igual a m*. Escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} m(x) = m. \tag{5}$$

Exemplo 5. *Encontre a equação da reta que tangencia a parábola $y = x^2$ no ponto $(2, 4)$.*

Solução. A equação reduzida dessa reta é $y - 4 = m(x - 2)$, onde m é o seu coeficiente angular. Para determinarmos m, precisamos estudar a razão

$$m(x) = \frac{x^2 - 2^2}{x - 2}$$

quando x se aproxima de 2, nos moldes da discussão que fizemos acima.

Para $x \neq 2$, podemos simplificar a expressão acima como

$$m(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2.$$

Considerando valores de x próximos de 2, vemos que $m(x)$ se aproxima de 4. Isso nos leva a acreditar que $m = 4$. Para confirmar isso, devemos mostrar que $|m(x) - 4|$ fica tão pequeno quanto desejarmos, se considerarmos x tal que $|x - 2|$ é pequeno. De fato,

$$|m(x) - 4| = |x + 2 - 4| = |x - 2|,$$

ou seja, a distância entre $m(x)$ e 4 é *igual* à distância entre x e 2. Assim, para qualquer exigência $\varepsilon > 0$ dada, basta considerar $\delta = \varepsilon$. Se $|x - 2| < \delta$, então

$$|m(x) - 4| = |x - 2| < \delta = \varepsilon.$$

Podemos, portanto, escrever

$$\lim_{x \to 2} m(x) = 4$$

e a equação da reta tangente a $y = x^2$ no ponto $(2, 4)$ é $y - 4 = 4(x - 2)$. $\square$

Exemplo 6. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |x|$. Calcule, se possível, os valores de $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, para $a \in \mathbb{R}$.*

Solução. Temos três casos a considerar: $a < 0$, $a = 0$ ou $a > 0$.

Se $a < 0$, podemos considerar x próximo de a, de modo que x também seja negativo. Neste caso, $|x| = -x$ e $|a| = -a$. Logo,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x| - |a|}{x - a} = \frac{-(x - a)}{x - a} = -1.$$

Assim, se $a < 0$, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a}(-1) = -1$.

Se $a > 0$, podemos novamente considerar x próximo de a, de modo que $x > 0$. Logo, $|x| = x$ e $|a| = a$, pois ambos são positivos, e

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x| - |a|}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

Assim, se $a > 0$, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a}(1) = 1$.

Finalmente, se $a = 0$, temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Neste caso, para qualquer $\delta > 0$, se $|x - 0| < \delta$, então $|x| < \delta$, isto é, $-\delta < x < \delta$. Se $-\delta < x < 0$, então $|x| = -x$ e $\frac{|x|}{x} = -1$. Se $0 < x < \delta$, então $|x| = x$ e $\frac{|x|}{x} = 1$. De qualquer modo, no intervalo $(-\delta, \delta)$ existem números $x < 0$ tais que $\frac{|x|}{x} = -1$ e existem números $x > 0$ tais que $\frac{|x|}{x} = 1$. Isso significa que o comportamento de $\frac{|x|}{x}$ não fica próximo a zero, podendo assumir dois valores distintos, -1 ou 1. Portanto, *não existe um único número real* do qual a razão $\frac{|x|}{x}$ se aproxime quando x tende a zero. Dizemos, neste caso, que o limite $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe. $\square$

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

A abordagem inicial que fizemos neste texto é de natureza algébrica. Ela tem dois méritos: primeiro, dá ao estudante uma ferramenta para resolver problemas de tangência para cônicas, usando apenas seus conhecimentos sobre equações quadráticas. Segundo, liga a noção geométrica de tangência à noção algébrica de raiz múltipla. A desvantagem deste método é que ele só é efetivo se estivermos procurando tangentes de curvas algébricas (isto é, curvas cujas equações sejam dadas por polinômios). A abordagem usando a noção de derivada tem um espectro de aplicação mais amplo.

A discussão em torno da definição de limite, que fizemos aqui, pode parecer muito retórica, ou até prolixa, mas é importante que o aluno tenha uma ideia clara do que é a noção de limite, mesmo que não consiga, de início, manipular a definição com desenvoltura. Antes de compreendermos as técnicas envolvidas, é importante que se compreenda a ideia de limite.

No Exemplo 6, usamos, de modo implícito, a unicidade do limite para mostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe. Você pode assumir essa unicidade (se o limite existe, então ele é único) para justificar a não existência de um limite, quando a função tende a dois valores distintos. A demonstração da unicidade pode ser vista depois.

Mais exemplos e resultados podem ser vistos nas sugestões de leitura complementar a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol. 1. Pearson, 12^a edição, São Paulo, 2014.