

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas

Continuidade em um ponto - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Janeiro de 2023



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Introdução

Vimos na primeira parte desse material, por meio do princípio dos intervalos encaixantes, que um número real fica univocamente determinado a partir de sequências de aproximações por falta e por excesso. É possível “quebrar a simetria” na formulação desse princípio. De modo mais preciso, provaremos abaixo (vide teorema 18) que um número real também fica determinado apenas por uma sequência de aproximações por falta (ou por excesso). A discussão que segue estabelecerá esse fato de uma forma equivalente.

Antes, contudo, apresentemos mais uma aplicação do princípio dos intervalos encaixantes.

Diremos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *localmente constante* se cada ponto $a \in X$ for centro de um intervalo aberto J de tal modo que a restrição $f|_{X \cap J}$ é constante. Por exemplo, se $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira do número real x , então a função $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é localmente constante. Também é claro que toda função constante é localmente constante. A recíproca desse fato, falsa em geral, é verdadeira se o domínio da função for um intervalo, de acordo com o

Exemplo 1. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente constante definida num intervalo I . Então, f é constante.*

Solução. Supondo, por contradição, que f não seja constante, existem pontos $a, b \in I$, com $a < b$, tais que $f(a) \neq f(b)$. Agora utilizaremos o método das bisseções sucessivas. Certamente, vale $f(a) \neq f(\frac{a+b}{2})$ ou $f(\frac{a+b}{2}) \neq f(b)$, de modo que em uma das metades $[a_2, b_2]$ de $[a_1, b_1] := [a, b]$ se verifica $f(a_2) \neq f(b_2)$. Esse argumento pode ser repetido para definir (por indução) uma sequência encaixante e colapsante $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos satisfazendo

$$f(a_n) \neq f(b_n), \quad (1)$$

para cada natural n . Por um lado, o princípio dos intervalos encaixantes garante a existência de um número real $c \in I$ pertencente a cada intervalo $[a_n, b_n]$; por outro, a hipótese assegura que, para algum $\varepsilon > 0$, a restrição da função f a

$I \cap (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ é constante. Como a sequência $([a_n, b_n])$ é colapsante, existe algum intervalo $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ cujo comprimento é menor que ε . Daí,

$$\begin{aligned} & |a_{n_0} - c|, |b_{n_0} - c| \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow & a_{n_0}, b_{n_0} \in I \cap (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \\ \Rightarrow & f(a_{n_0}) = f(b_{n_0}), \end{aligned}$$

contradizendo (1). Portanto, f é uma função constante. \square

2 Supremo e ínfimo

Diremos que um subconjunto X da reta \mathbb{R} é *limitado superiormente* se existe um número real b satisfazendo $x \leq b$, para cada $x \in X$. Nesse caso, b é dito uma *cota superior* de X .

De forma similar, um número real a é dito uma *cota inferior* de X caso, para todo $x \in X$, ocorra $a \leq x$. Um conjunto X é *limitado inferiormente* se admitir uma cota inferior.

Observação 2. *Seguem das definições as seguintes equivalências*¹: X é limitado superiormente se, e só se, $-X$ é limitado inferiormente; b é cota superior de X se, e somente se, $-b$ é cota inferior de $-X$.

Exemplo 3. *Se I é um intervalo de extremos α e β , com $\alpha < \beta$, então qualquer número real $b \geq \beta$ (resp. $a \leq \alpha$) é uma cota superior (resp. inferior) de I .*

Exemplo 4. \mathbb{N} é limitado inferiormente (mais ainda, $1 = \min \mathbb{N}$). A afirmação “ \mathbb{N} é ilimitado superiormente” é uma forma equivalente de enunciar a propriedade arquimediana de \mathbb{R} .

Se um conjunto X de números reais admitir uma *menor* cota superior β , diremos que β é o *supremo* de X e escrevemos $\beta = \sup X$. Por exemplo, qualquer intervalo limitado superiormente tem seu extremo superior como supremo.

¹Por definição, $-X := \{-x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 5. *Afirmamos que $0 = \sup Q^-$, sendo Q^- o conjunto dos números racionais negativos. De fato, é claro que 0 é uma cota superior de Q^- . Por outro lado, dado um número real $a < 0$, a densidade dos racionais (demonstrada na proposição 2 da 1ª parte dessa aula) garante a existência de um número racional r no intervalo $(a, 0)$. Como $r \in Q^-$, a desigualdade $a < r$ impede que a seja uma cota superior de Q^- . Assim, 0 é a menor das cotas superiores de Q^- , justificando a afirmação.*

Exemplo 6. *Digamos que $X \subset \mathbb{R}$ admita um elemento máximo ω : $\omega \in X$ e $x \leq \omega$, para cada $x \in X$. Então, $\omega = \sup X$. Por outro lado, o intervalo aberto $(0, 1)$ admite 1 como supremo, muito embora não haja maior elemento nesse intervalo. Desse modo, a noção de supremo generaliza a noção de maior elemento.*

Em referência ao exemplo anterior, se X admite supremo, então X possui elemento máximo se, e só se, $\sup X \in X$ (e, nesse caso, $\sup X = \max X$). Isso sugere uma estratégia, em dois passos, para mostrar que um conjunto X admite um maior elemento: 1º - existência de $\sup X$; 2º - pertinência $\sup X \in X$ (para uma aplicação dessa ideia, veja a continuação dessa aula). A existência do supremo de um conjunto é tratada no

Teorema 7. *Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo.*

Prova. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado superiormente. Assim, o conjunto Y das cotas superiores de X é não vazio e vale $x \leq y$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Portanto, a propriedade da completude de \mathbb{R} garante a existência de $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \leq \beta \tag{2}$$

e

$$\beta \leq y, \tag{3}$$

sejam quais forem os elementos $x \in X$ e $y \in Y$. A desigualdade (2) garante a pertinência $\beta \in Y$; a segunda, diz que β é o menor elemento de Y , ou seja, $\beta = \sup X$, como queríamos. \square

Simetricamente à noção de supremo, temos a noção de *ínfimo*: se a for a *maior* cota inferior de um conjunto X , diz-se que a é o ínfimo de X e escreve-se $a = \inf X$. Por exemplo, $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$, sendo tal igualdade mais uma releitura do princípio arquimediano.

Deixamos ao encargo do leitor adaptar para “inf” os exemplos acima formulados para “sup”. Em particular, a noção de ínfimo generaliza a noção de menor elemento.

Observação 8. *A relação*

$$\inf X = -\sup(-X) \quad (4)$$

permite obter, para cada resultado enunciado relativamente à noção de supremo, uma versão formulada em termos de ínfimo. Para justificar (4), levamos em consideração a observação 2, de modo que, se Y é o conjunto das cotas inferiores de X , então $-Y$ é o conjunto das cotas superiores de $-X$ e $\max Y = -\min(-Y)$ ², o que dá a relação desejada.

Quanto ao teorema anterior, temos a seguinte versão:

Teorema 9. *Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado inferiormente, admite ínfimo.*

A demonstração segue os mesmos passos da prova do teorema 7. Alternativamente, sendo X não vazio e limitado inferiormente, então, pela observação 2, $-X$ satisfaz as condições no teorema 7, de sorte que existe $\beta = \sup(-X)$ e, pela relação (4), $\alpha = -\beta$ é o ínfimo de X .

O próximo exemplo coleciona algumas propriedades úteis, relativamente aos conceitos de ínfimo e supremo.

Exemplo 10. *Sejam A, A' e B conjuntos não-vazios de números reais.*

²Igualdade válida sempre que um qualquer dos membros fizer sentido.

- i) Se $x \leq y$, para quaisquer $x \in A, y \in B$, então $\sup A \leq \inf B$.
- ii) Se A, A' são limitados superiormente (resp. inferiormente) e $A' \subset A$, então $\sup A' \leq \sup A$ (resp. $\inf A' \geq \inf A$).

Solução. Para o primeiro item, note que cada elemento $y \in B$ é uma cota superior de A , de modo que $\sup A \leq y$, para todo $y \in B$, uma vez que $\sup A$ é a menor das cotas superiores de A . Portanto, $\sup A$ é uma cota inferior de B , o que implica $\sup A \leq \inf B$, já que $\inf B$ é a maior das cotas inferiores de B .

Quanto a ii), deixamos como encargo ao leitor verificar o seguinte fato: se Y, Y' admitem elementos mínimos (resp. máximos) e $Y \subset Y'$, então $\min Y' \leq \min Y$ (resp. $\max Y' \geq \max Y$)³. Portanto, como $A' \subset A$, toda cota superior de A também é uma cota superior de A' , isto é, $Y \subset Y'$, sendo Y (resp. Y') o conjunto das cotas superiores de A (resp. A'). Logo, $\sup A' = \min Y' \leq \min Y = \sup A$. A justificativa da relação $\inf A' \geq \inf A$, para o caso de A, A' serem limitados inferiormente, segue os mesmos passos da anterior. \square

3 Aplicações

3.1 A equação de Cauchy

Um conjunto X de números reais é dito *limitado* se for limitado inferior e superiormente. Por exemplo, todo conjunto finito é limitado. Também é claro que cada intervalo de extremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Em verdade, segue imediatamente da definição que X é limitado se, e só se, X é subconjunto de algum intervalo $[\alpha, \beta]$. Da inclusão $[\alpha, \beta] \subset [-M, M]$, com $M = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, vemos que X é limitado se, e somente se, vale $|x| \leq M$, para alguma constante positiva M e para todo $x \in X$.

³Dessa forma, a 2ª parte desse exemplo generaliza um resultado válido para elementos máximos e mínimos.

Uma função f é dita limitada (resp. limitada inferiormente, limitada superiormente) se sua imagem $\text{Im}(f)$ for um conjunto limitado (resp. limitado inferiormente, limitado superiormente). Por exemplo, \cos e \sin são funções limitadas. Uma função g da forma $g(x) = f(x)^2$ é limitada inferiormente (podendo ser ilimitada superiormente, e.g., tomando-se $f(x) = x$). Por fim, funções afins e não identicamente nulas são ilimitadas inferior e superiormente.

Exemplo 11. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função aditiva, isto é, tal que*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (5)$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se f for limitada em algum intervalo limitado, então f é limitada em cada intervalo limitado.

A equação (5) é conhecida na literatura como **equação de Cauchy**.

Antes de iniciar a prova desse exemplo, vamos deduzir algumas consequências da equação funcional acima.

1. $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$: verifica-se, por indução, a igualdade $f(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i)$, para quaisquer números reais x_1, \dots, x_n ; tomando $x_1 = \dots = x_n = x$, obtém-se a relação desejada.
2. $f(0) = 0$: isso segue da lei do corte, pois $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$.
3. $f(x - y) = f(x) - f(y)$: de fato, $f(x) = f(y + (x - y)) = f(y) + f(x - y)$.
4. f é ímpar: basta, agora, notar que $f(-x) = f(0 - x) = f(0) - f(x) = -f(x)$.

Prova do Exemplo 11. Suponhamos que f seja limitada no intervalo $[a, b]$ ($a < b$), com $|f(x)| \leq K$, para cada $x \in [a, b]$. Pondo $c := b - a$ e $M := K + |f(a)|$, afirmamos inicialmente que $|f(x)| \leq M$, se $|x| \leq c$. De fato, sendo f uma função ímpar, podemos supor $0 \leq x \leq c$, ou seja, $a \leq a + x \leq b$. Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &= |f(a+x) - f(a)| \\
 &\leq |f(a+x)| + |f(a)| \\
 &\leq K + |f(a)| = M.
 \end{aligned}$$

Agora, dado um intervalo limitado qualquer I , vale $I \subset [-n_0c, n_0c]$ para algum número natural n_0 suficientemente grande. Portanto, se $y \in I$, então $y = n_0x$, com $|x| \leq c$, o que dá $|f(y)| = n_0|f(x)| \leq n_0M$. Isso demonstra que f é limitada em I . \square

O exemplo anterior implica o seguinte resultado.

Proposição 12. *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva e limitada em algum intervalo limitado, então f é uma função linear: pondo $a = f(1)$, temos $f(x) = ax$, para cada número real x .*

Prova. ⁴ Se f é aditiva e limitada em algum intervalo limitado, então o mesmo se pode dizer da função g definida por $g(x) = f(x) - ax$, para $x \in \mathbb{R}$. Todavia, como $g(1) = 0$, a função g deve ser periódica, admitindo 1 como um período: $g(x+1) = g(x) + g(1) = g(x)$, para todo x . Sendo as imagens de g e da restrição de g ao intervalo $[0,1]$ iguais, o fato de g ser limitada em $[0,1]$ (a qual segue do exemplo 11) garante a limitação de g .

Afirmção: g é identicamente nula.

De fato, suponha $|g(x)| \leq M$, para todo x . Assim, para $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$n|g(x)| = |g(nx)| \leq M \Rightarrow |g(x)| \leq M/n.$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$ na desigualdade anterior, concluímos (por permanência do sinal) a desigualdade $|g(x)| \leq 0$, ou seja, $g(x) = 0$. Pela arbitrariedade de x , fica provada a afirmação.

Concluimos, então, que $f(x) = ax$, para cada $x \in \mathbb{R}$. \square

⁴Seguimos a referência [2].

Observação 13.

- i) Como toda função monótona $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada em intervalos limitados, fica estabelecida a seguinte proposição: se f é uma função real de uma variável real, aditiva e monótona, então f é uma função linear.
- ii) Com um pouco mais de trabalho, pode-se mostrar (veja a referência [4]) que existem infinitas funções reais de uma variável real aditivas mas não monótona (logo, não lineares).

3.2 Caracterização dos intervalos

Dizemos que um número real a é um *valor intermediário* do conjunto $J \subset \mathbb{R}$ se existirem pontos $b, c \in J$ tais que $b \leq a \leq c$. Se $VI(J)$ é o conjunto formado pelos valores intermediários de $J \neq \emptyset$, veremos agora que $VI(J)$ é um intervalo (certamente contendo J , e não degenerado, caso J contenha pelo menos dois elementos).

De fato, digamos que J seja limitado e sejam $\alpha = \inf J$ e $\beta = \sup J$. Dado $a \in VI(J)$, vale $\alpha \leq b \leq a \leq c \leq \beta$, para certos $b, c \in J$, de forma que $a \in [\alpha, \beta]$. Isso prova a inclusão $VI(J) \subset [\alpha, \beta]$. Por outro lado, dado $x \in (\alpha, \beta)$, temos que x não é cota inferior nem cota superior de J , de modo que existem $y, z \in J$ tais que $y < x < z$. Conclui-se, assim, que $x \in VI(J)$, ou melhor, $(\alpha, \beta) \subset VI(J)$. Ora, as inclusões $(\alpha, \beta) \subset VI(J) \subset [\alpha, \beta]$ dizem que $VI(J)$ é um intervalo de extremos α e β , como queríamos.

Os demais casos, em que J é ilimitado inferior e/ou superiormente, são tratados de forma semelhante. Por exemplo, se J for limitado inferiormente mas ilimitado superiormente, uma adaptação do argumento acima prova que $VI(J)$ é um intervalo de extremos $\alpha = \inf J$ e $+\infty$.

Como $VI(J)$ é um intervalo contendo J , é fácil verificar que J será um intervalo se, e só se, ocorrer a inclusão reversa $VI(J) \subset J$ (caso em que $VI(J) = J$). Daí, obtemos a

Proposição 14. *Um conjunto não vazio de números reais é*

um intervalo se, e somente se, esse conjunto contém cada um dos seus valores intermediários.

3.3 Raízes n -ésimas

Aplicaremos a proposição acima ao seguinte

Exemplo 15. Se a é um número real positivo e n é um número natural, considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x^n < a\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \text{ e } a < y^n\}$. Então, $\sup A = \inf B = e$, definindo $b = \sup A$, tem-se que $b^n = a$.⁵

Prova. Primeiro observe que A e B são não vazios: as igualdades equivalentes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} y^n = +\infty$$

mostram que todo número positivo suficientemente pequeno c satisfaz $c^n < a$ e que todo número suficientemente grande d cumpre $a < d^n$.

Agora, se y é um valor intermediário do conjunto A , com $x \leq y \leq z$ e $x, z \in A$, então $y > 0$ e $y^n \leq z^n < a$, de modo que $y \in A$. Pela proposição anterior, A é um intervalo de extremos 0 e $b = \sup A$. Do mesmo modo conclui-se que B é um intervalo de extremos $\beta := \inf B$ e $+\infty$.

Como $A \cap B = \emptyset$, vale $b \leq \beta$ (tal desigualdade também é uma consequência do exemplo 10). Se tivéssemos $b < \beta$, qualquer ponto t do intervalo aberto (b, β) , por não pertencer a qualquer um dos conjuntos A ou B , satisfaria $t^n = a$, contrariando a injetividade da função $0 \leq x \mapsto x^n$. Portanto, $b = \beta$.

Finalmente, uma vez que $x^n < a$ (resp. $y^n > a$), para cada $x \in A$ (resp. $y \in B$), obtemos, pela permanência do sinal, $b^n = \lim_{x \rightarrow b^-} x^n \leq a$ (resp. $b^n = \lim_{y \rightarrow b^+} y^n \geq a$). Logo, $b^n = a$. \square

Observação 16. O exemplo acima estabelece a existência de raízes n -ésimas a partir da completude de \mathbb{R} . É interessante

⁵Por definição, $b = \sqrt[n]{a}$.

notar que, de um ponto de vista geométrico, raízes quadradas podem ser construídas. Mais precisamente, dado um quadrado de área a , é possível construir com régua e compasso seu lado (que tem comprimento \sqrt{a}). Isso não ocorre para todas as raízes n -ésimas. Por exemplo, o problema análogo tridimensional é insolúvel com $a = 2$: é impossível construir, com régua e compasso, a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo unitário. De outro modo, é impossível construir um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$ com régua e compasso.

3.4 Aproximações por falta/excesso

Diz-se que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de aproximações por falta (resp. por excesso) se (a_n) for limitada e monótona não decrescente (resp. não crescente): $a_m \leq a_n$ (resp. $a_m \geq a_n$) para quaisquer naturais m, n com $m \leq n$. Por exemplo, $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de aproximações por excesso (do número 0).

Exemplo 17. Se $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$, então (a_n) é uma sequência de aproximações por falta. Com efeito, a soma definindo a_n é telescópica, como se vê a partir da relação $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

A igualdade $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ nos diz, á um só tempo, que (a_n) é crescente e limitada (temos $0 < a_n < 1$, para cada natural n). Mais ainda, (a_n) é uma sequência de aproximações por falta do número 1.

Em conformidade com os exemplos anteriores, veremos agora que os termos de uma sequência de aproximações, de fato, devem aproximar algum número. Mais precisamente,

Teorema 18. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Prova. Digamos que (a_n) seja uma sequência limitada e monótona não decrescente. Devemos mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ existe. Pelas hipóteses, um candidato natural ao limite de (a_n) é o supremo $L = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ do conjunto dos termos dessa sequência, cuja existência é garantida pelo teorema 7 (já que (a_n) é limitada). Em particular, para cada n natural, tem-se

$$a_n \leq L. \quad (6)$$

Agora, dada uma estimativa de erro $\varepsilon > 0$, temos que $L - \varepsilon$ não pode ser cota superior do conjunto dos termos da sequência, visto que L já é a menor delas. Portanto, algum termo a_{n_0} satisfaz $L - \varepsilon < a_{n_0}$. Desse modo, a monotonicidade de (a_n) garante que $n > n_0 \Rightarrow a_{n_0} \leq a_n$, logo,

$$L - \varepsilon < a_n, \quad (7)$$

para cada $n > n_0$. Das relações (6) e (7), concluímos que $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n \leq L$, ou melhor,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon;$$

isso estabelece a igualdade $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$.

De modo análogo, se (a_n) for limitada e monótona não crescente, prova-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. \square

Observação 19.

- i) *O resultado anterior está para o teorema 7 assim como o princípio dos intervalos encaixantes está para a completude de \mathbb{R} .*
- ii) *Sem a hipótese de limitação no teorema anterior, o limite da sequência ainda existe e é infinito. Mais precisamente, se (a_n) for uma sequência monótona não decrescente (resp. não crescente) e ilimitada, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$). A prova dessas afirmações será deixada como exercício.*

Exemplo 20. Mostre que a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Prova. Vejamos que a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada. Ela é crescente pelo exemplo 5 da aula *Desigualdades Elementares - Parte 3* do módulo de desigualdades.

Para estabelecer sua limitação, utilizaremos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (vide teorema 1 da aula *Desigualdades Elementares - Parte 2*) com os $n + 1$ números $1/2, 1/2, 1, \dots, 1$, obtendo

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1} &= \frac{1/2 + 1/2 + 1 + \dots + 1}{n+1} \\ &\geq \sqrt[n+1]{1/2 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \sqrt[n+1]{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

Portanto, $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \leq \sqrt[n+1]{4}$, implicando

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq 4,$$

o que dá $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$, para cada n natural.

Assim, o teorema 18 assegura que a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ converge. \square

Observação 21. O número de Euler, denotado e , é definido pela igualdade

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Trata-se de um número irracional⁶, admitindo a aproximação $e \cong 2,71828$, com 5 casas decimais exatas.

⁶Até mesmo transcendente, ou seja, e não é raiz de um polinômio (não identicamente nulo) a coeficientes inteiros.

3.5 Existência de limites laterais

O próximo resultado, enunciado na aula *Limites Laterais* do módulo anterior (vide teorema 8 dessa aula), é uma versão do teorema 18 para funções reais de uma variável real. Recomendamos que o leitor retorne à seção 2 daquele material para recordar as noções pertinentes ao entendimento do teorema que segue.

Teorema 22. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona.*

- i) Se o limite à esquerda de f no ponto a fizer sentido e f for limitada à esquerda de a , então existe $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.*
- ii) Se o limite à direita de f no ponto a fizer sentido e f for limitada à direita de a , então existe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.*

Prova. Suponhamos que f seja monótona não-decrescente (como esperado, o caso “ f é monótona não crescente” é completamente similar).

Nas hipóteses do item i), o conjunto $A = \{f(x) \mid x \in X \text{ e } x < a\}$ é não vazio e limitado superiormente. Portanto, pelo teorema 7, existe $L = \sup A$.

Afirmção: $L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Com efeito, dado um número real positivo ε , o número $L - \varepsilon$ não pode ser cota superior do conjunto A . Portanto, existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 < a$ e $L - \varepsilon < f(x_0)$. Logo, $\delta := a - x_0$ é um número positivo e $0 < a - x < \delta \Rightarrow a > x > x_0$. Assim, pela monotonicidade de f ,

$$x \in X, 0 < a - x < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L,$$

de onde segue que

$$x \in X, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

justificando a afirmação feita.

Quanto ao limite à direita de f em a , agora nas hipóteses do item ii), deixaremos a cargo do leitor a prova da igualdade $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf B$, onde $B = \{f(t) \mid t \in X \text{ e } a < t\}$. \square

Observação 23.

- i) Perceba as semelhanças entre as demonstrações dos teoremas 18 e 22.
- ii) No contexto do teorema anterior, vale uma observação análoga àquela registrada em 19, ii).

3.6 Mais um exemplo

Exemplo 24. Calcule o supremo do conjunto \mathcal{N} das somas

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}, \quad (8)$$

sendo a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo qualquer.

Prova. Pela desigualdade triangular, temos $a < b + c$, o que implica $a + (b + c) < 2(b + c)$, ou ainda, $1/(b + c) < 2/(a + b + c)$. Logo,

$$\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}.$$

De forma similar, temos

$$\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Somando, membro a membro, as três desigualdades acima, obtemos

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2.$$

Assim, 2 é uma cota superior do conjunto \mathcal{N} .

Mais ainda, 2 é a *menor* cota superior de \mathcal{N} . Com efeito, para cada número natural n , sejam $a_n = 1$ e $b_n = c_n = n$, de modo que a_n, b_n e c_n são as medidas dos lados de um

triângulo isósceles. Como

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n + c_n} + \frac{b_n}{c_n + a_n} + \frac{c_n}{a_n + b_n} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2}{1+1/n} \right) = 2, \end{aligned}$$

dado $\beta < 2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\frac{a_{n_0}}{b_{n_0} + c_{n_0}} + \frac{b_{n_0}}{c_{n_0} + a_{n_0}} + \frac{c_{n_0}}{a_{n_0} + b_{n_0}} > \beta$$

(permanência do sinal). Conclui-se que β não é cota superior de \mathcal{N} e, portanto, 2 é a menor cota superior de \mathcal{N} , isto é, $\sup \mathcal{N} = 2$. \square

Observação 25. Em complemento à desigualdade apresentada no exemplo anterior, temos a desigualdade de Nesbitt

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \quad (9)$$

válida para quaisquer números positivos a, b e c . Além disso, ocorre a igualdade em (9) se, e só se, $a = b = c$ (vide [3], problema 8 da seção 7.4).

Dicas para o Professor

Em relação à observação 16, veja o apêndice da referência [1]. Lá, você encontrará uma discussão sobre os problemas clássicos gregos da *duplicação do cubo*, *trisseção do ângulo* e *quadratura do círculo*. A insolubilidade de tais problemas, determinada entre os séculos XVIII e XIX (com ferramentas algébricas!), destaca a diferença entre *número* (real) e *número construtível*. Muitos números reais (na verdade, a “maioria” deles) não são o resultado de uma construção com régua e compasso. Por exemplo, $\sqrt[3]{2}$, $\cos 20^\circ$ e π (o que,

respectivamente, estabelece a insolubilidade dos problemas mencionados anteriormente). O número de Euler, e , também não é construtível ⁷.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. Wagner. *Construções Geométricas*. 6^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
2. C. G. Small. *Functional Equations and How to Solve Them*. Springer, 2007.
3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 1. Números Reais*. 2^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
4. C. Goffman. *Real Functions*. Nova Iorque: Rinehart, 1953.

⁷Prova-se que todo número construtível é *algébrico*, ou seja, é raiz de um polinômio de grau positivo e coeficientes inteiros. Portanto, números transcendentais, isto é, não algébricos, como π e e , são não construtíveis.