Material Teórico - Módulo Equações Algébricas - Raízes e Coeficientes

Fórmulas Resolutivas – Segundo Método

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

21 de fevereiro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Nesta aula, apresentamos uma maneira alternativa de calcular raízes de uma equação de terceiro grau. O texto é inspirado no artigo “Uma Solução das Equações do 3° e do 4° Graus”, por Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira, na 25ª Revista do Professor de Matemática (`https://rpm.org.br/cdrpm/25/5.htm`).

2 Equações de terceiro grau

2.1 Inspiração

O método apresentado aqui é inspirado em um problema relacionado a equações de *segundo* grau. Dada uma equação de segundo grau de raízes x_1 e x_2, é muito comum querer calcular expressões algébricas simétricas nas variáveis x_1 e x_2, por exemplo, expressões como $x_1^2 + x_2^2$ ou $x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2$, em que os papeis de x_1 e x_2 são simétricos. É interessante que várias dessas expressões podem ser obtidas diretamente em função dos coeficientes da equação, ou seja, é possível obter fórmulas para algumas expressões que são mais simples do que calcular x_1 e x_2 individualmente. É clado que $x_1 + x_2$ e $x_1 x_2$ são exemplos de expressões algébricas simétricas que podem ser obtidas diretamente pelas relações de Girard. Podemos usar tais valores para calcular outras expressões, como no exemplo a seguir.

Exemplo 1. *Sejam x_1 e x_2 raízes de $x^2 - Sx^2 + P = 0$. Encontre expressões para $x_1^2 + x_2^2$ e $x_1^3 + x_2^3$ em função de S e P.*

Solução. Usando o produto notável

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2,$$

obtemos:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P.$$

Por outro lado, usando o produto notável

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3,$$

obtemos:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3PS.$$

□

2.2 Demonstração alternativa para a fórmula de Cardano

Partimos do pressuposto que ainda não conhecemos a fórmula de Cardano. Assim, caso o leitor tenha estudado a aula anterior, finja que esqueceu (quase) tudo que você leu nela. Em especial, não é permitido aplicar a fórmula de Cardano, pois nesta seção nosso objetivo é justamente deduzir tal fórmula.

Considere a equação de *segundo* grau escrita na forma

$$x^2 - Sx^2 + P = 0, \tag{1}$$

em que S é a soma e P o produto da raízes, x_1 e x_2, de tal equação.

Defina $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$. Assim como no Exemplo 1, gostaríamos de calcular y em função de S e P. Elevando y ao cubo, obtemos:

$$\begin{aligned} y^3 &= (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})^3 \\ &= x_1 + 3\left(\sqrt[3]{x_1}\right)^2 \sqrt[3]{x_2} + 3\sqrt[3]{x_1}\left(\sqrt[3]{x_1}\right)^2 + x_2 \\ &= x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}\left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right) \\ &= S + 3\sqrt[3]{P} \cdot y. \end{aligned}$$

Observação 2. *É preciso tomar muito cuidado com a última igualdade na série acima. Estamos usando que* $\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2} = \sqrt[3]{x_1 x_2} = \sqrt[3]{P}$. *Isso é verdade quando* x_1 *e* x_2 *são reais e estamos considerando a (única) raiz cúbica real desses números.*

Nos complexos, existem três possíveis valores para $\sqrt[3]{x_1}$*, assim como para* $\sqrt[3]{x_2}$ *e para* $\sqrt[3]{P}$*. E, como vimos no módulo sobre números complexos, a distributividade da radiciação em relação à multiplicação nem sempre vale. Por exemplo,*

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

Contudo, ao multiplicar qualquer raiz cúbica complexa de x_1*, por qualquer raiz cúbica complexa de* x_2 *o resultado obtido é uma das três raízes cúbicas de* P*.*

Infelizmente, não conseguimos uma fórmula para y em função apenas de S e P, mas acabamos concluindo algo interessante: y é uma das raízes da equação de terceiro grau

$$y^3 - 3\sqrt[3]{P}y - S = 0. \tag{2}$$

Assim, para calcular y, "bastaria" resolver a equação de terceiro grau acima. Esta tentativa de *simplificar* o cálculo do valor de y acabou sendo frustrada, pois não sabemos resolver essa equação. — O ponto aqui é que, ao contrário do Exemplo 1, onde é mais fácil calcular $x_1^3 + x_2^3$ do que calcular x_1 e x_2 individualmente, resolver a equação 2 para calcular o valor de $y = 3\sqrt[3]{x_1} + 3\sqrt[3]{x_2}$ é tão difícil quanto calcular x_1 e x_2 diretamente, pela fórmula de Bhaskara, como raízes da equação (1), para depois calcular $3\sqrt[3]{x_1} + 3\sqrt[3]{x_2}$.

Por outro lado, fazendo uma "engenharia reversa" na discussão acima, o que acabamos de encontrar foi justamente uma maneira de resolver a equação $y^3 - 3\sqrt[3]{P}y - S = 0$. E com uma simples mudança de variáveis, podemos derivar uma método para resolver qualquer equação de terceiro grau em que o coeficiente de x^3 seja igual a 1 e o de x^2 seja igual a 0, como faremos abaixo.

De fato, de forma semelhante ao que fizemos na aula passada, considere que desejamos resolver a equação de terceiro grau (na variável y) reduzida

$$y^3 + py + q = 0. \tag{3}$$

Comparando a equação acima coma equação (2), podemos fazer $p = -3\sqrt[3]{P}$ e $q = -S$. Isolando S e P, obtemos $S = -q$ e $P = -p^3/27$. Substituindo estes valores na equação (1), podemos definir x_1 e x_2 como as raízes da equação de segundo grau $x^2+qx-27p^3 = 0$ e concluir que uma raiz da equação (3) é da forma $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$. Se aplicarmos Bhaskara para resolver $x^2 + qx - p^3/27 = 0$, obtemos:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}\right) \text{ e } x_2 = \frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}\right),$$

o que equivale a:

$$x_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

Isso nos fornece justamente a fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{4}$$

O caso em que temos uma equação de terceiro grau qualquer pode ser resolvido da mesma forma que fizemos na aula anterior, com outra substituição de variável. Primeiro, podemos supor, sem perda da generalidade, que o coeficiente de x^3 é igual a 1. Isso porque, para uma equação de terceiro grau qualquer, podemos dividir cada coeficiente pelo coeficiente de x^3 e, assim, obter uma equação na forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{5}$$

Procuramos fazer uma substituição do tipo $x = z+t$, onde z será nossa nova variável e t é um valor fixo que precisa ser escolhido de modo que a equação de terceiro grau na variável z tenha o coeficiente de z^2 igual a zero. Na aula passada, usamos as relações de Girard para justificar que $t = -a/3$ é valor de que precisamos. Outra maneira de justificar essa escolha é substituir $x = z + t$ diretamente na equação (5) e observar que:

$$(z+t)^3 + a(z+t)^2 + b(z+t) + c = 0$$

equivale a

$$(z^3 + 3\boldsymbol{z^2}t + 3\boldsymbol{z}t^2 + t^3) + a(\boldsymbol{z^2} + 2\boldsymbol{z}t + t^2) + b(\boldsymbol{z} + t) + c = 0$$

ou, ainda, a

$$z^3 + (3t+a)\boldsymbol{z^2} + (3t^2+2at+b)\boldsymbol{z} + (t^3+at^2+bt+c) = 0.$$

Como queremos zerar o coeficiente de z^2, basta fazer $3t + a = 0$, ou seja, $t = -a/3$ (como esperado). Isso nos dá a equação

$$z^3 + \left(\frac{-a^2}{3} + b\right) z + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0.$$

que pode ser resolvida usando a fórmula de Cardano.

Observação 3. *A equação acima não precisa (nem deve) ser memorizada. O importante é entender qual substituição de variável precisa ser feita para que seja possível aplicar a fórmula de Cardano.*

3 Equações de quarto grau

Um caso bastante simples de equação de quarto grau são as chamadas equações biquadráticas, que possuem o formato

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \tag{6}$$

A principal característica é que os coeficientes de x^3 e de x são iguais a zero. Equações assim são exemplos comuns nas aulas de equação de segundo grau, pois basta fazer $y = x^2$ para obter:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Resolvendo essa equação de segundo grau, obtemos o valor de y e, em seguida, obtemos $x = \pm\sqrt{y}$.

O próximo caso mais simples é aquele em que apenas o coeficiente de x^3 é igual zero. Vamos resolver esse problema de duas maneiras diferentes. A primeira usa a mesma ideia da seção anterior.

3.1 Inspiração

Na seção anterior, usamos um equação de segundo grau como pontapé inicial para a obtenção da fórmula resolutiva de equações de terceiro grau. Agora, usaremos a de terceiro grau para resolver uma de quarto grau.

Considere uma equação de terceiro grau da forma:

$$x^3 - Sx^2 + Tx - P = 0. \tag{7}$$

Sejam x_1, x_2, x_3 suas raízes e lembre-se de que as relações de Girard fornecem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= S, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= T, \\ x_1x_2x_3 &= P. \end{aligned}$$

Seja $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$, com o detalhe de que aqui usamos $\sqrt{x_1}$ como uma maneira simplificada de expressar qualquer uma das raízes (duas) quadradas complexas de x_1 (o mesmo valendo para $\sqrt{x_2}$ e $\sqrt{x_3}$). Temos

$$\begin{gathered} y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2\left(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}\right) \implies \\ \frac{y^2 - S}{2} = \sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}. \end{gathered}$$

Elevando ambos os lados da última equação ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &\quad + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{(y^2-S)^2}{4} = T + 2\sqrt{P}y,$$

o que é equivalente à equação de quarto grau:

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4T = 0. \tag{8}$$

3.2 Fórmula resolvente (grau 4)

Com as ideias acima, já podemos resolver equações de quarto grau no caso particular em que o coeficiente do termo de grau 3 seja igual a zero. Para tanto, considere uma equação na forma

$$y^4 + by^2 + cy + d = 0. \tag{9}$$

Quando $d = 0$, podemos colocar y em evidência. Temos que $y = 0$ é uma das raízes e podemos calcular as demais raízes resolvendo uma equação de terceiro grau. Suponha que $d \neq 0$.

Comparando (9) com (8), queremos fazer,

$$-2S = b, \quad -8\sqrt{P} = c \quad \text{e} \quad S^2 - 4T = d.$$

o que equivale a:

$$S = -\frac{b}{2}, \quad P = \left(\frac{c}{8}\right)^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{S^2-d}{4} = \frac{b^2-4d}{16}.$$

Substituindo os valores acima na equação (7), obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{2}x^2 + \frac{b^2-4d}{16}x - \left(\frac{c}{8}\right)^2 = 0.$$

Admitindo que já sabemos resolver qualquer equação de grau 3, podemos calcular as raízes da equação acima.

Sendo x_1, x_2, x_3 tais raízes, vemos que as raízes de (1) são dadas por:

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}.$$

Na verdade, cada uma das raízes acima pode ser substituída por uma dentre 2 raízes quadradas complexas. (Como

x_1, x_2, x_3 são diferentes de zero, cada um tem exatamente duas duas raízes complexas). Isso nos daria 8 possíveis valores para testar para y. Contudo, a equação $\sqrt{P} = -c/8$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -c/8$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$, há apenas um possível valor de $\sqrt{x_3}$ que gera um y válido. Dessa forma, obtemos todas as quatro raízes da equação de quarto grau original.

Para finalizar, observamos que, para obter as raízes de um equação de quarto grau qualquer, começamos dividindo todos os coeficiente pelo coeficiente de x^4, a fim de obter uma equação na forma

$$\boxed{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.} \tag{10}$$

Por sua vez, para resolver essa última equação, basta fazer a substituição $x = y - A/4$ para obter uma equação de quarto grau em y, com o coeficiente de y^3 nulo. Encontrando os valores de y que satisfazem tal equação, basta subtrair $A/4$ de cada um deles para encontrar as raízes da equação (10).

3.3 Solução alternativa (grau 4)

Suponha que seja dada uma equação de grau 4 qualquer. Assim, como na seção anterior, iniciamos transformando essa equação em uma equação cujo termo cúbico é nulo:

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Entende-se que x é nossa variável e b, c, d são valores conhecidos. Toda equação deste tipo, pode ser reescrita no formato:

$$(x^2 + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$$

De fato, uma vez que

$$(x^2 + p)^2 - (qx + r)^2 = x^4 + (2p^2 - q^2)x^2 + 2qrx + (p^2 - r^2),$$

basta escolher p, q, r satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} 2p^2 - q^2 = b, \\ 2qr = c, \\ p^2 - r^2 = d. \end{cases}$$

Subtraindo duas vezes a terceira equação da primeira, obtemos:

$$2r^2 - q^2 = b - 2d.$$

Usando que $2qr = c$, temos $q = c/2r$, logo,

$$2r^2 - \left(\frac{c}{2r}\right)^2 = b - 2d.$$

Daí,

$$8r^4 + 4(2d - b)r^2 - c^2 = 0,$$

uma equação biquadrática em r. Então, fazendo $r^2 = t$, temos um equação de segundo grau em t. Obtendo o valor de t, podemos obter o valor de r e, por substituição direta no sistema original, calcular os valores de p e q.

A vantagem de obter um equação da forma $(x^2 + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$ é que ela é a diferença entre dois quadrados, de sorte que podemos usar o produto notável $X^2 - Y^2 = (X + Y)(X - Y)$. Assim, obtemos:

$$(x^2 + p + qx + r)(x^2 + p - qx - r) = 0.$$

Para que este produto seja zero, é necessário e suficiente que um dos fatores seja zero; com isso, podemos calcular os possíveis valores de x.

4 Discussão final

Neste texto, incluímos poucos exemplos numéricos de aplicações dos métodos aqui apresentados. Mas exercícios resolvidos detalhadamente podem ser encontrados na seção “Caderno de Exercícios” das aulas “Fórmulas Resolutivas-Primeiro Método” e “Fórmulas Resolutivas – Segundo Método”. Sugerimos fortemente que o leitor tente fazer esses exercícios e estude suas soluções, caso não consiga resolvê-los sozinho.

Após ler as seções 2 e 3 deste material, o leitor pode ficar tentado a encontrar uma formula geral para equações de quinto grau, partindo das soluções de equações de quarto grau. Porém, isso não funciona. As expressões $(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})^3$ e $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})^2$ que aparecem nas seções 2 e 3 são bastante peculiares, e **não há** uma expressão que desempenhe um papel análogo para equações de quinto grau.

Assim é que, apesar de ser possível resolver *casos bastante específicos* de equações de quinto grau, o Teorema de Abel–Rufini nos diz que **é impossível encontrar** uma fórmula que use apenas a operação de radiciação e as quatro operações aritméticas elementares (soma, subtração, multiplicação e divisão) e que resolva equações de grau 5 quaisquer.

Para uma equação polinomial arbitrária, de grau maior ou igual a 5, o Teorema de Galois[1] nos garante que também **é impossível encontrar** uma fórmula geral resolvente, nos mesmo moldes acima. Este é um fato bastante popular. Contudo, sua demonstração não é elementar, sendo estudada apenas em cursos de Teoria de Galois, no Ensino Superior.

Dicas para o Professor

Este material se propõe a apresentar uma justificativa alternativa para a fórmula de resolução de equações terceiro grau, sendo uma continuação natural da aula anterior. Esta parte pode ser ministrada em um único encontro de 50 minutos. Boa parte do conteúdo aqui exposto também pode ser encontrado na referência [3].

A referência [1] contém uma discussão relativamente completa e profunda sobre equações polinomiais. A referência [2] é uma agradável leitura, a qual contempla a história das tentativas de se resolver equações polinomiais.

[1]Devida ao matemático francês Évariste Galois, que viveu de 1811 a 1832 e é considerado um dos grandes gênios da Matemática.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. I. Stewart. *Uma História da Simetria em Matemática*. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.

3. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira, "Uma Solução das Equações do 3° e do 4° Graus", 25ª Revista do Professor de Matemática (https://rpm.org.br/cdrpm/25/5.htm).