

**Material Teórico - Módulo: Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de  
Cilindros, Cones e Esferas**

**Cilindro**

**Terceiro Ano - Médio**

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**  
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**



É comum que copos, fios, canudinhos, vasilhas, tampas, canos, moedas, canetas, etc., tenham o formato cilíndrico. Troncos de árvores, vasos sanguíneos, ossos e fios de cabelo também têm formato cilíndrico.

Nesta aula, veremos uma definição precisa do objeto geométrico *cilindro circular*, que é uma representação matemática de todas as formas citadas acima. Também, estudaremos algumas de suas propriedades métricas.

## 1 Cilindros circulares

Seja  $C$  um círculo de centro  $O$  e raio  $r > 0$ . A região  $D$  do plano delimitada pelo círculo  $C$  é chamada de **disco** de centro  $O$  e raio  $r$ . Enfatizamos que o círculo  $C$  está contido no disco  $D$ . A parte do disco que não está contida em  $C$  é chamada **interior** do disco.

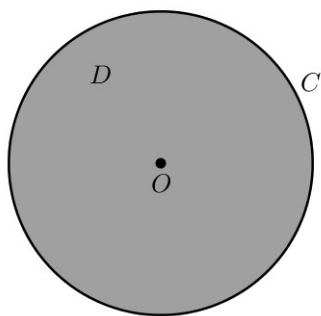


Figura 1: disco com centro  $O$ , delimitado pelo círculo  $C$ .

Consideremos, agora, um disco  $D$  contido em um plano e um segmento  $AB$  não contido no plano do disco  $D$ . Podemos supor que uma das extremidades do segmento, digamos o ponto  $A$ , não está no plano que contém o disco  $D$ . Para cada ponto  $P \in D$ , consideremos o segmento  $PP'$  que satisfaz as três seguintes condições:

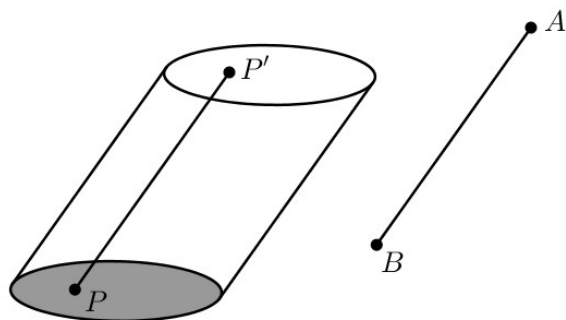


Figura 2: um cilindro e sua geratriz  $AB$ .

- (1) a reta que passa por  $P$  e  $P'$  é paralela à reta determinada por  $A$  e  $B$ ;
- (2)  $\overline{PP'} = \overline{AB}$ ;
- (3) para cada  $P \in D$ , o ponto  $P'$  está no mesmo semi-espaço que o ponto  $A$ , em relação ao plano que contém o disco  $D$ .

O conjunto formado por todos os segmentos  $PP'$  satisfazendo (1), (2) e (3), com  $P \in D$ , é um **sólido**, chamado **cilindro circular** de **base**  $D$  e **geratriz**  $AB$ . Chamaremos o plano que contém a base  $D$  do cilindro de **plano da base** do cilindro.

O conjunto dos segmentos  $PP'$  satisfazendo (1), (2) e (3), com  $P \in C$ , é uma **superfície**, chamada **superfície cilíndrica circular** com base  $C$  e geratriz  $AB$ . Intuitivamente, a superfície cilíndrica é a “casca” do cilindro. Como todos os cilindros e superfícies cilíndricas que vamos estudar aqui são circulares, vamos chamá-los apenas de *cilindros* e *superfícies cilíndricas*.

Quando a geratriz de um cilindro é perpendicular ao plano da base, dizemos que esse cilindro é **reto**. Caso contrário, dizemos que o cilindro é **oblíquo** (figura 3).

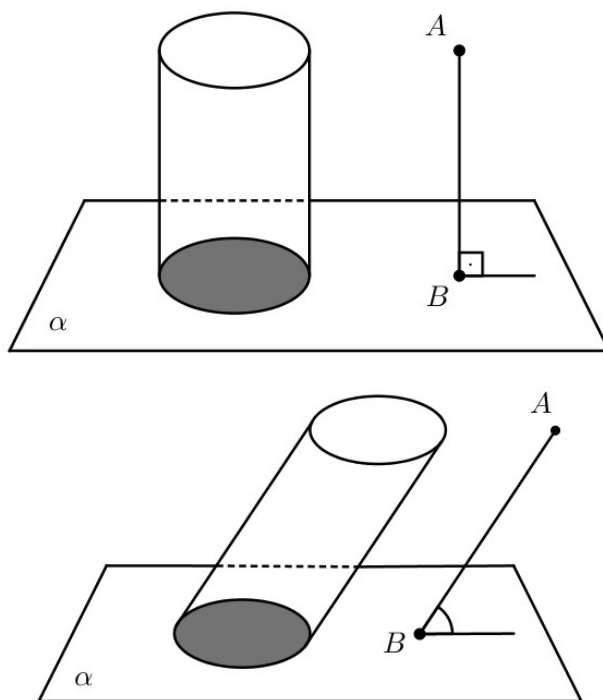


Figura 3: cilindro reto e cilindro oblíquo.

Os extremos dos segmentos que determinam um cilindro formam dois discos, os quais chamamos de **bases** do

cilindro. Se um cilindro é reto, a reta determinada pelos centros de suas bases é chamada **eixo de simetria** do cilindro.

A **altura** de um cilindro é a distância entre os planos que contêm suas bases. Se um cilindro é reto, sua altura coincide com a distância entre os centros de suas bases.

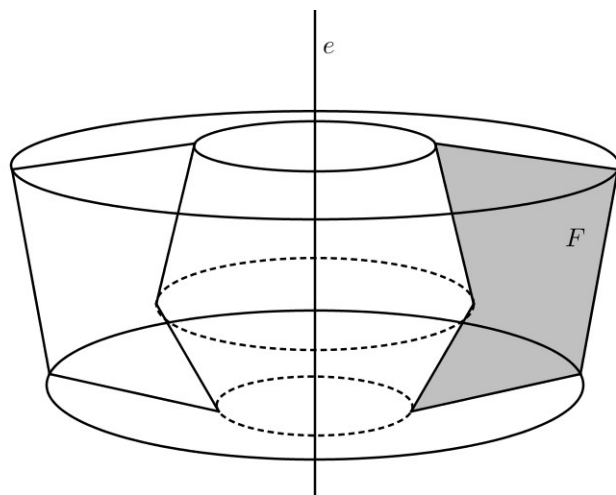


Figura 4: um sólido de revolução.

Em geral, dada uma reta  $e$  e uma figura  $F$  contida em um plano que passa por  $e$ , ao girarmos  $F$  em torno de  $e$ , obtemos um sólido, chamado **sólido de revolução** gerado por  $F$  e com eixo de simetria  $e$  (figura 4).

Quando a figura  $F$  é um retângulo e o eixo de simetria  $e$  passa por um dos lados desse retângulo, o sólido gerado é um cilindro reto. Reciprocamente, todo cilindro reto pode ser construído dessa maneira. Por isso, também chamamos um cilindro reto de **cilindro de revolução**.

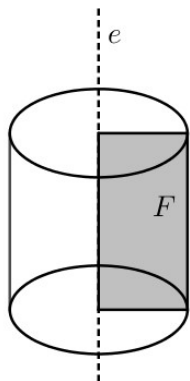


Figura 5: um cilindro de revolução.

Suponhamos que um cilindro de revolução seja obtido a partir da rotação de um retângulo com lados de comprimentos  $r$  e  $h$  em torno do lado que tem comprimento  $h$ . Então, o raio da base desse cilindro é  $r$  e sua altura é  $h$ .

A intersecção de um cilindro reto com um plano que contém o seu eixo de simetria é chamada de **secção meridiana** do cilindro. Quando a secção meridiana de um cilindro é um quadrado (isto é, quando  $h = 2r$ , nas notações acima), dizemos que o cilindro é **equilátero** (figura 6).

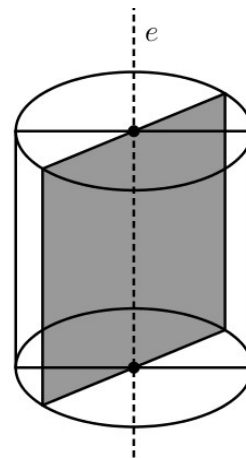


Figura 6: um cilindro equilátero.

## 2 Área da superfície de um cilindro circular

A superfície de um cilindro circular reto é formada por suas duas bases, que são discos, juntamente com a superfície cilíndrica em si, à qual chamamos **superfície lateral** do cilindro.

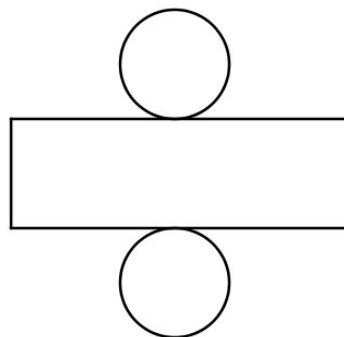


Figura 7: planificação de um cilindro reto.

Para calcularmos a área dessa superfície, é suficiente encontrar uma região do plano que tenha a mesma área que ela e, em seguida, calcular a área dessa região do plano. Uma região do plano com essa propriedade é dita uma **planificação** da superfície cilíndrica.

No caso de um cilindro circular reto, essa planificação é relativamente simples (figura 7), sendo composta pelos dois círculos, que são as bases do cilindro, e por um retângulo, que corresponde à sua superfície lateral. A altura desse retângulo é igual à altura do cilindro, enquanto a sua base é igual ao comprimento do círculo  $C$  que delimita a base do cilindro (isso porque *desenrolamos* a superfície lateral do cilindro para formar o retângulo).

Assim, se um cilindro circular reto tem raio da base  $r$  e altura  $h$ , então a área das duas bases é  $2\pi r^2$  e a área lateral do cilindro é

$$\underbrace{2\pi r}_{\text{base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altura}}.$$

Desse modo, a área total da superfície de um cilindro reto de raio da base  $r$  e altura  $h$  é

$$A_C = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h). \quad (1)$$

No caso particular em que o cilindro é equilátero, vimos que  $h = 2r$ . Logo, a área de sua superfície é

$$A_C = 2\pi r(r + 2r) = 6\pi r^2. \quad (2)$$

Uma pergunta natural que surge a partir do que foi discutido acima é: *qual é a área da superfície de um cilindro oblíquo?* Convidamos o leitor a imprimir e recortar a figura 8 abaixo, ignorando o segmento tracejado. Depois enrole o pedaço de papel recortado e cole ao longo da pequena aba.

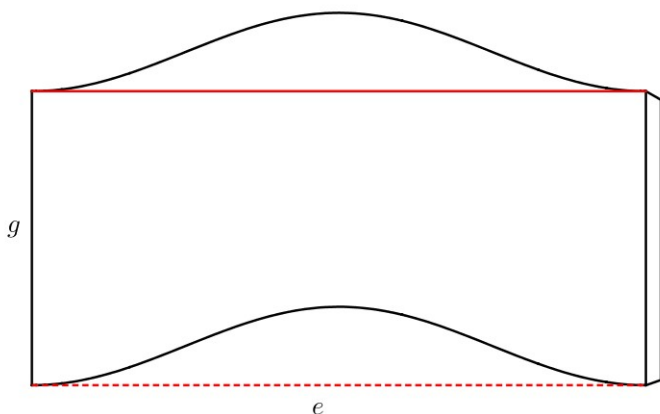


Figura 8: planificação de um cilindro oblíquo.

A figura resultante será um cilindro oblíquo, sem as bases. O segmento vermelho na figura 8 corresponde a uma

*elipse* que é a interseção de um plano perpendicular à geratriz do cilindro passando pela extremidade de um dos segmentos que formam a superfície cilíndrica (figura 9).

Observe que a área planificada, desenhada na figura 8, é igual à área do retângulo de altura igual ao comprimento  $g$  da geratriz do cilindro e base igual ao comprimento do segmento vermelho da figura 8 que é a planificação da elipse que aparece em vermelho na figura 9.

Dessa forma, a área lateral de um cilindro circular oblíquo é igual à área lateral de um cilindro reto *cujas bases são elipses*. Esse cilindro pode ser obtido deslocando-se parte do cilindro oblíquo da figura 9 que está abaixo da elipse vermelha para a parte superior desse cilindro. Isso corresponde, na planificação, a deslocar a parte que está acima do segmento vermelho na figura 8 para a parte inferior dessa figura de modo a produzir um retângulo.

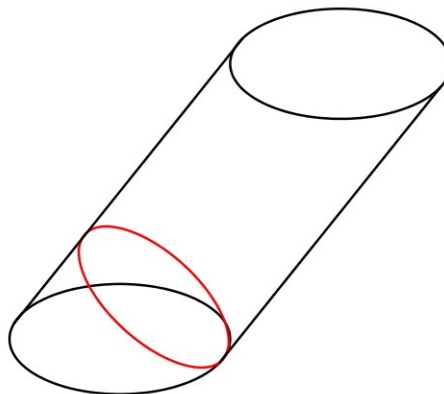


Figura 9: cilindro oblíquo. O segmento vermelho da figura anterior é agora uma elipse sobre o cilindro.

Portanto, a área lateral do cilindro oblíquo é

$$A_L = g \cdot \ell \quad (3)$$

onde  $g$  é o comprimento da geratriz do cilindro e  $\ell$  é o comprimento da elipse obtida como seção do cilindro por um plano perpendicular à reta que passa pelos centros de suas bases.

No entanto, não há uma fórmula simples para calcular o comprimento de uma elipse<sup>1</sup>, mesmo se usarmos ferramentas mais sofisticadas, como o Cálculo! O problema de se determinar o comprimento de uma elipse aparentemente foi considerado pela primeira vez pelo matemático inglês John Wallis (1616-1703) em 1665. Esse problema deu origem à noção de *integral elíptica*, assunto que foi objeto de estudo de muitos matemáticos famosos, como Euler, Legendre, Gauss, Abel e Jacobi.

<sup>1</sup>Para o cálculo aproximado do comprimento de uma elipse, com um erro tão pequeno quanto desejado, veja o problema 3 da Seção 5.3 de [1].

### 3 Volume de cilindros circulares

Nesta seção vamos demonstrar que o volume de um cilindro circular é igual a área de sua base multiplicada por sua altura. Para isso, iremos usar o *princípio da exaustão* e o *princípio de Cavalieri*.

Dado um cilindro circular reto  $\mathcal{C}$ , cuja base é um disco  $D$  de raio  $r$ , vamos construir, para cada natural  $n \geq 3$ , dois prismas retos  $p_n$  e  $P_n$ , cujas bases são polígonos regulares, da seguinte maneira.

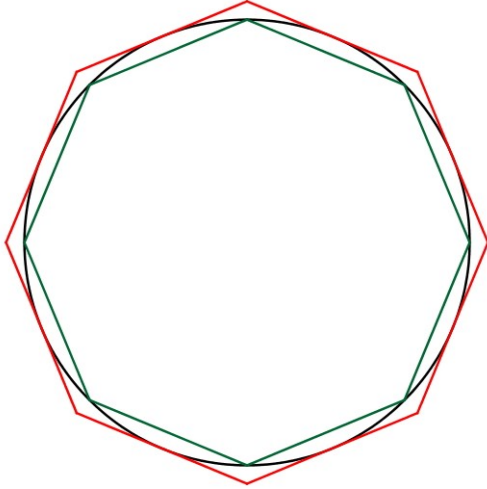


Figura 10: a base de um cilindro e polígonos regulares inscrito e circunscrito à mesma.

A base do prisma  $p_n$  é um polígono regular  $q_n$  de  $n$  lados, inscrito no disco  $D$ , enquanto a base de  $P_n$  é um polígono regular  $Q_n$  de  $n$  lados, circunscrito ao disco  $D$ . Vamos denotar as áreas de  $q_n$  e  $Q_n$  por  $A(q_n)$  e  $A(Q_n)$ . Uma vez que as alturas de  $p_n$ ,  $P_n$  e do cilindro são todas iguais a  $h$ , os volumes dos prismas  $p_n$  e  $P_n$  são dados, respectivamente, por

$$\text{vol}(p_n) = A(q_n)h \text{ e } \text{vol}(P_n) = A(Q_n)h.$$

Agora, se  $A(D)$  é a área da base do cilindro, então

$$A(q_n) < A(D) < A(Q_n).$$

Assim,  $A(q_n)h < A(D)h < A(Q_n)h$ , ou seja,

$$\text{vol}(p_n) < A(D)h < \text{vol}(P_n), \quad (4)$$

para todo  $n \geq 3$ .

Por outro lado, como o prisma  $p_n$  está contido no cilindro e o prisma  $P_n$  contém o cilindro, temos que

$$\text{vol}(p_n) < \text{vol}(\mathcal{C}) < \text{vol}(P_n), \quad (5)$$

para todo  $n \geq 3$ , onde  $\text{vol}(\mathcal{C})$  indica o volume do cilindro  $\mathcal{C}$ .

A seguir, mostraremos que as validades de (4) e (5) para todo  $n \geq 3$  não deixa outra alternativa além de que seja

$$\text{vol}(\mathcal{C}) = A(D)h.$$

Para tanto, note inicialmente que, para cada erro  $\varepsilon > 0$ , é possível escolher  $n$  suficientemente grande, tal que

$$|\text{vol}(P_n) - \text{vol}(p_n)| < \varepsilon.$$

Se  $\text{vol}(\mathcal{C})$  fosse diferente de  $A(D)h$  a diferença  $\text{vol}(\mathcal{C}) - A(D)h$  seria diferente de zero, e poderíamos escolher  $\varepsilon = |\text{vol}(\mathcal{C}) - A(D)h| > 0$ . Para esse  $\varepsilon$ , existe  $n$  suficientemente grande tal que  $|\text{vol}(P_n) - \text{vol}(p_n)| < \varepsilon = |\text{vol}(\mathcal{C}) - A(D)h|$ . Porém, isso contradiz o fato (veja a figura 11) de que

$$|\text{vol}(\mathcal{C}) - A(D)h| < |\text{vol}(P_n) - \text{vol}(p_n)|$$

para todo  $n \geq 3$ .

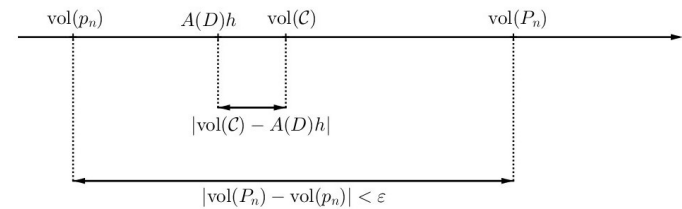


Figura 11: (4) e (5) garante que a diferença entre  $A(D)h$  e  $\text{vol}(\mathcal{C})$  é controlada pela diferença entre  $\text{vol}(P_n)$  e  $\text{vol}(p_n)$ .

Assim, concluímos que  $\text{vol}(\mathcal{C}) = A(D)h$ , isto é, o volume do cilindro reto em questão é igual à área da sua base multiplicada pela sua altura. Se  $r$  é o raio da base  $D$ , então  $A(D) = \pi r^2$ ; logo o volume de um cilindro reto de altura  $h$  e raio da base  $r$  é igual a

$$\text{vol}(\mathcal{C}) = \pi r^2 h. \quad (6)$$

No caso particular em que o cilindro é equilátero, temos  $h = 2r$ , logo

$$\text{vol}(\mathcal{C}_E) = 2\pi r^3. \quad (7)$$

Vejam, agora, o caso do cilindro oblíquo  $\mathcal{C}$ , de altura  $h$  e base  $D$  de área  $A(D)$ . Construa um cilindro reto  $\mathcal{C}_1$  de mesma altura e cuja base seja um círculo de mesmo raio que  $\mathcal{C}$  (figura 12).

Para cada plano  $\alpha$  paralelo ao plano que contém as bases dos dois cilindros, as interseções  $\alpha \cap \mathcal{C}$  e  $\alpha \cap \mathcal{C}_1$ , de  $\alpha$  com cada um dos cilindros, são círculos de raios iguais aos raios dos círculos das bases de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}_1$ , respectivamente. Mas, como os círculos das bases de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}_1$  têm raios iguais, concluímos que as áreas  $A_1$  e  $A_2$  de  $\alpha \cap \mathcal{C}$  e  $\alpha \cap \mathcal{C}_1$ , respectivamente, são iguais, para cada plano  $\alpha$  tomado como

acima. Então, pelo *Princípio de Cavalieri*, os dois cilindros têm um mesmo volume, ou seja,

$$\text{vol}(\mathcal{C}) = \text{vol}(\mathcal{C}_1) = A(D)h$$

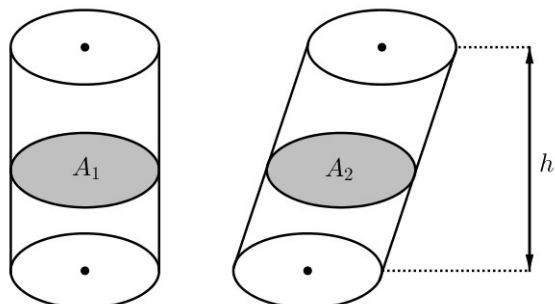


Figura 12: as áreas das seções paralelas às bases são iguais.

### Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

O estudo do cilindro oblíquo dá margem a certas explorações experimentais que podem ser bem motivadoras. Além de imprimir a figura 8 e recortá-la para produzir um modelo do cilindro oblíquo (sem as bases), você pode desenvolver as seguintes atividades com seus alunos: (1) envolva uma tira estreita de papel em uma vela e corte a vela, junto com o papel fazendo um corte que não seja perpendicular ao eixo de simetria da vela (por onde passa o pavio da vela). A figura obtida tem o mesmo aspecto que a figura 8. (2) Mergulhe parcialmente um rolo de pintar paredes em um recipiente com tinta, de modo que o rolo, ao ser mergulhado na tinta não esteja na vertical (veja a figura 13).

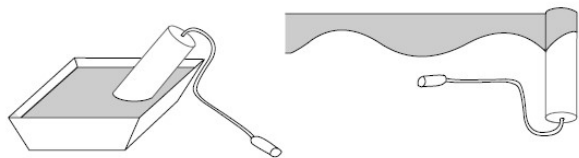


Figura 13: como pintar “ondinhas” na parede (veja a referência [6]).

Ao passar o rolo sobre uma superfície plana, como um papel, ou uma parede, o resultado será o mostrado na figura 13: a parte pintada apresenta um padrão ondulado. As curvas onduladas das figuras 8 e 13 são senoides, ou

seja, gráficos de funções do tipo  $f(x) = A \cdot \text{sen}(Tx)$ , onde  $A$  e  $T$  são constantes que controlam, respectivamente, a *amplitude* e o *período* da senoide.

Explorar as conexões entre o cilindro oblíquo e a função seno pode ser bastante enriquecedor para a sua aula. As referências [5] e [6] podem ser consultadas para aprofundamento. As referências [2], [3] e [4] contêm vários exercícios acerca do material discutido nesta aula.

### Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Cálculo*, Coleção Profmat, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2014.
2. A. Caminha. *Geometria*, Coleção Profmat, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
3. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
4. O. Dolce, J. N. Pompeo, *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol.10, sétima edição, São Paulo, 2013.
5. H. Steinhauss, *Mathematical Snapshots*, Galaxy Books, Oxford University Press, Oxford, 1983.
6. T. M. Apostol e M. A. Mnatsakanian, *Unwrapping Curves from Cylinders and Cones*, The American Mathematical Monthly, vol. 114, (2007), pp. 388–416.