Material Teórico - Determinantes como Áreas - Parte II

Propriedade Geral

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de Agosto de 2022

Portal OBMEP

Portal da Matemática
OBMEP

Ao longo das últimas três aulas, apresentamos as propriedades fundamentais do determinante. Aqui, interpretaremos essas propriedades em termos de transformações lineares. Geometricamente, a ideia é a seguinte (veja o teorema (1)): *toda aplicação linear transforma um paralelogramo num paralelogramo cuja área é o produto da área do primeiro paralelogramo pelo valor absoluto do determinante da aplicação linear*. Encerraremos com algumas aplicações geométricas.

1 A propriedade geral

Sejam V o espaço dos vetores no plano e $T : V \to V$ uma transformação linear. Relembre que o determinante de T, $\det T$, é o determinante de qualquer matriz $[T]$ dessa transformação (confira as aulas *Interpretação Algébrica* e *Composição* do módulo *Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria*): fixado um sistema cartesiano de coordenadas, relativamente ao qual $[T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, vale $\det T = ad - bc$.

Agora, digamos que T transforma o paralelogramo $ABCD$ no paralelogramo $A'B'C'D'$. Definindo $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AD}$ e $u' = \overrightarrow{A'B'}, v' = \overrightarrow{A'D'}$, segue que $T(u) = u'$ e $T(v) = v'$. Como $[T(u),T(v)] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot [u,v]$, a regra de Binet nos dá $\det[u',v'] = \det[T(u),T(v)] = \det T \cdot \det[u,v]$, ou seja, levando em consideração que $\det[u, v]$ e $\det[u', v']$ são as áreas orientadas de $ABCD$ e $A'B'C'D'$, acabamos de obter o

Teorema 1. *Toda aplicação linear transforma um paralelogramo (resp. triângulo) num paralelogramo (resp. triângulo) cuja área orientada é o produto da área orientada do primeiro paralelogramo (resp. triângulo) pelo determinante da aplicação linear. Em símbolos,*

$$\det[T(u),T(v)] = \det T \cdot \det[u,v], \tag{1}$$

Portal OBMEP

para quaisquer vetores u, v e para qualquer aplicação linear $T : V \to V$.

Também podemos demonstrar esse teorema recorrendo à caracterização do determinante apresentada na aula passada. De fato, definindo $f(u,v) = \det[T(u),T(v)]$, é fácil verificar, pela linearidade de T, que f é uma função alternante, homogênea e aditiva das colunas u e v de uma matriz 2×2. Portanto, pelo teorema 12 daquela aula, $f(u,v) = f(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \det[u,v]$, em que $f(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \det[T(\boldsymbol{i}),T(\boldsymbol{j})]$ nada mais é que o determinante de T (aqui, $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ são os vetores unitários dos eixos coordenados). Isso demonstra a fórmula (1).

Observação 2. *Vejamos como a propriedade geral, expressa no Teorema* (1)*, caracteriza a função determinante, justificando, assim, o adjetivo "geral". Seja $f = f(u,v)$ uma função das colunas u,v de uma matriz, satisfazendo $f(T(u),T(v)) = (\det T) f(u,v)$, para cada transformação linear T. Vamos mostrar que f é um múltiplo da função determinante. De fato, dado um par $u = (a,b), v = (c,d)$ de vetores no plano, associada à matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ está a aplicação linear $T : V \to V$ satisfazendo $T(\boldsymbol{i}) = u, T(\boldsymbol{j}) = v$. Portanto, $f(u,v) = f(T(\boldsymbol{i}),T(\boldsymbol{j})) = (\det T) f(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = f(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \det[u,v]$, como queríamos.*

Na décima primeira videoaula desse módulo, a propriedade geral nos foi apresentada sob a forma

$$\det[a \cdot u + b \cdot v, c \cdot u + d \cdot v] = (ad - bc) \det[u,v], \qquad (2)$$

para quaisquer vetores u,v e para quaisquer números reais a,b,c,d.

A demonstração é direta e consiste do uso das propriedades fundamentais do determinante, quais sejam, alternância, homogeneidade e aditividade.

Como esperado, a igualdade (2) equivale à fórmula (1). Sendo a verificação imediata caso u e v sejam colineares, podemos supor o contrário. Assim, apelando ao Lema 12 da aula

Portal OBMEP

Composição do módulo *Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria*, existe uma (única) transformação linear $T : V \to V$ satisfazendo $T(u) = a \cdot u + b \cdot v$ e $T(v) = c \cdot u + d \cdot v$. Afirmamos que $\det T = ad - bc$. Com efeito, basta ver que $\det T \det[u,v] = \det[T(u),T(v)] = (ad - bc) \det[u,v]$. Cancelando o fator $\det[u,v] \neq 0$, segue a afirmação. Portanto, $\det[a \cdot u + b \cdot v, c \cdot u + d \cdot v] = (ad - bc) \det[u,v] \Leftrightarrow \det[T(u),T(v)] = \det T \det[u,v]$, como desejado.

Nos moldes do teorema 5 da 2ª aula do módulo anterior, podemos generalizar o teorema anterior da seguinte forma.

Corolário 3. *Se $T : V \to V$ é uma aplicação linear invertível, $\mathcal{R}$ é uma região do plano e $\mathcal{R}' = T(\mathcal{R})$ é a imagem de $\mathcal{R}$ por T, então*

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}') = |\det T|\mathcal{A}(\mathcal{R}).$$

Prova. Basta repetir os mesmos passos da demonstração do teorema citado acima: o primeiro caso segue do teorema (1) e, para os demais casos, basta substituir k^2 por $|\det T|$. $\square$

Exemplo 4. *Uma elipse de semieixos de medidas a e b tem área πab.*

Solução. Seja E a elipse do enunciado. Num sistema conveniente de coordenadas ortogonais z,w, E se expressa pela equação $\frac{z^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} = 1$. Ora, a aplicação linear $T(x,y) = (ax, by)$ satisfaz $\det T = ab$ e transforma o círculo unitário $C : x^2 + y^2 = 1$ em E (se $z = ax$ e $w = by$, $\frac{z^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$). Pelo corolário anterior, vem $\mathcal{A}(E) = \det T \cdot \mathcal{A}(C) = \pi ab$. $\square$

2 A área de um polígono simples

Todo polígono simples P, de vértices (consecutivos) P_1, P_2, $\ldots$, P_n, admite duas orientações, uma definida pela sequência $P_1 P_2 \ldots P_n$, e a outra dada pela ordenação $P_n P_{n-1} \ldots P_1$. Nesta seção, quando escrevermos $P = P_1 P_2 \ldots P_n$, ficará subentendida a escolha da orientação para P determinada na notação.

Portal OBMEP

Inspirados pelo Exemplo 2 da aula passada, vamos definir $[P_1P_2\dots P_n]$, a *área orientada* de $P_1P_2\dots P_n$, como

$$[P_1P_2\dots P_n] = [OP_1P_2] + \cdots + [OP_{n-1}P_n] + [OP_nP_1]. \quad (3)$$

Naturalmente, espera-se que $|[P_1P_2\dots P_n]|$ seja a área do polígono $P_1P_2\dots P_n$, fato que será estabelecido em breve. Antes, algumas observações simples.

1. *A área orientada de um polígono depende da sua orientação*:

$$[P_1P_2\dots P_n] = -[P_nP_{n-1}\dots P_1].$$

2. $[P_1P_2\dots P_n]$ *independe do ponto* O. Pois, dado um outro ponto O', o Exemplo 2 da aula anterior nos dá (tome $P_{n+1} := P_1$)

$$\begin{aligned}[P_1P_2\dots P_n] &= \sum_{i=1}^{n}[OP_iP_{i+1}] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[O'OP_i] + \sum_{i=1}^{n}[O'P_iP_{i+1}] + \sum_{i=1}^{n}[O'P_{i+1}O] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[O'P_iP_{i+1}],\end{aligned}$$

posto que

$$\sum_{i=1}^{n}[O'P_{i+1}O] = \sum_{i=1}^{n}[O'P_iO] = -\sum_{i=1}^{n}[O'OP_i].$$

3. *A área orientada é aditiva: se* $1 \le m < n$, *então*

$$[P_1P_2\dots P_n] = [P_1P_2\dots P_m] + [P_mP_{m+1}\dots P_nP_1].$$

Portal OBMEP

Ora,

$$
\begin{aligned}
&[P_1P_2\dots P_m] + [P_mP_{m+1}\dots P_nP_1] = \\
&= \sum_{i=1}^{m-1}[OP_iP_{i+1}] + [OP_mP_1] + \sum_{i=m}^{n}[OP_iP_{i+1}] + [OP_1P_m] \\
&= \sum_{i=1}^{m-1}[OP_iP_{i+1}] + \sum_{i=m}^{n}[OP_iP_{i+1}] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[OP_iP_{i+1}] \\
&= [P_1P_2\dots P_n].
\end{aligned}
$$

4. Se os triângulos BCA e BAD têm apenas o lado AB em comum (i.e., C e D estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$), então $[BCA]$ e $[BAD]$ têm mesmo sinal (ou seja, BCA e BAD estão igualmente orientados, no sentido geométrico da aula anterior).

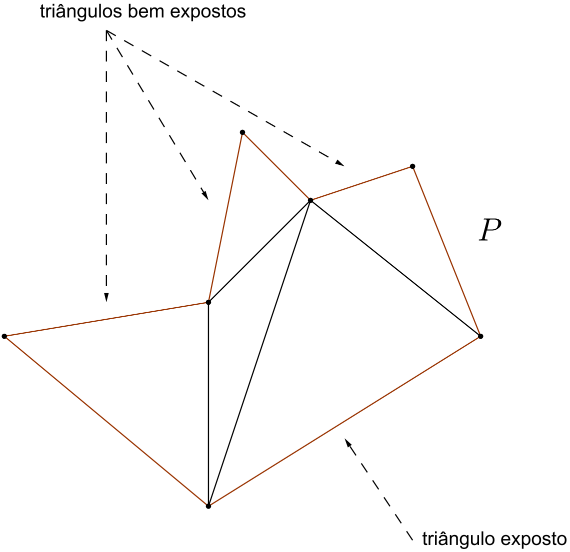
Basta notar que, se $\overrightarrow{BD} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{BA}$, então $\alpha < 0$, de modo que $[BAD] = \det[\overrightarrow{BA}, \alpha \cdot \overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{BA}] = \alpha \det[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = -\alpha[BCA]$, i.e., $[BAD]/[BCA] = -\alpha > 0$.

Antes de enunciar o resultado principal desta seção, vamos recordar o Lema 2 da 2ª aula do módulo anterior: *se P é um polígono simples de n lados, então $\overline{P}$ pode ser* ***triangulado****. Mais precisamente, $\overline{P}$ se decompõe numa reunião de $n-2$ regiões triangulares, quaisquer duas das quais sem pontos interiores em comum, sendo os vértices desses triângulos também vértices de P.*

Fixada uma triangulação de P, diremos que um triângulo Δ dessa triângulação é *exposto* (resp. *bem exposto*) se Δ compartilha algum lado (resp. dois lados) com P (veja a próxima figura).

Orientando P, digamos $P = P_1P_2\dots P_n$, cada triângulo exposto Δ da triangulação adquire uma orientação que "concorda" com a orientação de P no(s) lado(s) em comum. Mais precisamente, se Δ é o triângulo de vértices P_i, P_{i+1} e P_j,

Portal OBMEP



definimos a sua orientação por $\Delta = P_iP_{i+1}P_j$.

Uma última observação: toda triangulação de P admite pelo menos dois triângulos bem expostos. De fato, cada lado de P também é lado de um único triângulo exposto. Como há no máximo $n-2$ deles se P possui n lados, segue a afirmação.

Teorema 5. *Se $P = P_1P_2 \ldots P_n$ é um polígono simples orientado, então $\mathcal{A}(P) = |[P_1P_2 \ldots P_n]|$. Além disso, se $[P_1P_2 \ldots P_n] > 0$ (resp. < 0), a orientação de P induz orientações positivas (resp. negativas) em cada triângulo exposto de uma triangulação de P.*

Prova. Por indução em n. A base de indução, $n = 3$, é o Exemplo 2 da aula passada. Suponhamos, então, o resultado verdadeiro para polígonos simples orientados com n lados, $n \geq 3$. Precisamos verificar a validade do resultado para um polígono simples orientado $P = P_1P_2 \ldots P_nP_{n+1}$.

Fixada uma triangulação em P, podemos admitir, sem perda de generalidade, que $P_nP_{n+1}P_1$ é um triângulo bem exposto. Considerando o polígono simples orientado $Q = P_1P_2 \ldots P_n$, afirmamos que as áreas orientadas $[P_1P_2 \ldots P_n]$ e $[P_nP_{n+1}P_1]$ têm mesmo sinal. Com efeito, digamos que $[P_1P_2 \ldots P_n]$ seja positivo. Logo, se $P_nP_1P_j$ é o triângulo de lado P_nP_1 da triangulação induzida em Q, a hipótese de indução e a 4ª observação acima nos garantem que $[P_nP_1P_j]$ é positivo e $[P_nP_{n+1}P_1], [P_nP_1P_j]$ têm mesmo sinal, de onde se conclui que $[P_nP_{n+1}P_1]$ também é positivo. De maneira análoga, $[P_1P_2 \ldots P_n]$ negativo implica $[P_nP_{n+1}P_1]$ negativo, e a afirmação segue.

Como $[P_1P_2 \ldots P_nP_{n+1}] = [P_1P_2 \ldots P_n] + [P_nP_{n+1}P_1]$ pela observação 3, e as parcelas no 2º membro têm mesmo sinal, vem

$$\begin{aligned}
|[P_1P_2 \ldots P_nP_{n+1}]| &= |[P_1P_2 \ldots P_n]| + |[P_nP_{n+1}P_1]| \\
&= \mathcal{A}(P_1P_2 \ldots P_n) + \mathcal{A}(P_nP_{n+1}P_1) \\
&= \mathcal{A}(P).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $[P_1P_2 \ldots P_nP_{n+1}] > 0$, então temos que $[P_1P_2 \ldots P_n] > 0$ e $[P_nP_{n+1}P_1] > 0$. Se Δ é um triângulo exposto na triangulação de P, então $\Delta = P_nP_{n+1}P_1$ ou Δ é um triângulo exposto da triangulação induzida em Q, o que, em qualquer caso, levando em conta a hipótese de indução, nos garante que Δ está positivamente orientado. Da mesma forma se mostra que $[P_1P_2 \ldots P_nP_{n+1}] < 0$ acarreta orientações induzidas negativas nos triângulos expostos da triangulação. Isso encerra a demonstração. □

Observação 6. *Nas hipóteses do teorema anterior, diremos que P está positivamente (resp. negativamente) orientado caso $[P_1P_2 \ldots P_n] > 0$ (resp. < 0). A ideia é que o sinal positivo ou negativo da área orientada de P determina se a orientação $P_1P_2 \ldots P_n$ induz o sentido anti-horário ou horário de rotação no plano, respectivamente. Por exemplo, digamos que uma partícula se mova na fronteira de P, segundo a orientação de P, supostamente positiva. Desse modo, quando a partícula se move do vértice P_i ao vértice P_{i+1}, o triângulo exposto de lado P_iP_{i+1}, que está orientado*

Portal OBMEP

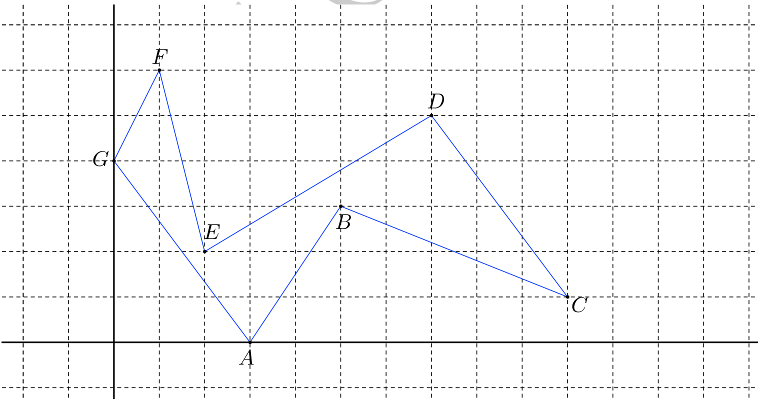
positivamente, situa-se à esquerda da partícula, ou seja, durante o seu percurso, a partícula mantém o interior de P sempre à sua esquerda, significando que a partícula percorre o perímetro de P no sentido anti-horário. Analogamente, se P está negativamente orientado, a partícula se move no sentido horário, tendo o interior de P sempre à sua direita.

Corolário 7. *Considere um polígono simples $P = P_1P_2 \ldots P_n$. Fixado um sistema cartesiano de coordenadas no plano, se $P_i = (x_i,y_i)$ para $1 \le i \le n$, então*

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right|. \quad (4)$$

Prova. Basta tomar O como a origem do sistema de coordenadas na relação (3) e utilizar o teorema anterior. □

Exemplo 8. *Calcule a área do polígono $ABCDEFG$, em que $A = (3{,}0)$, $B = (5{,}3)$, $C = (10{,}1)$, $D = (7{,}5)$, $E = (2{,}2)$, $F = (1{,}6)$ e $G = (0{,}4)$.*



OBMEP

Solução. Pela fórmula (4), temos

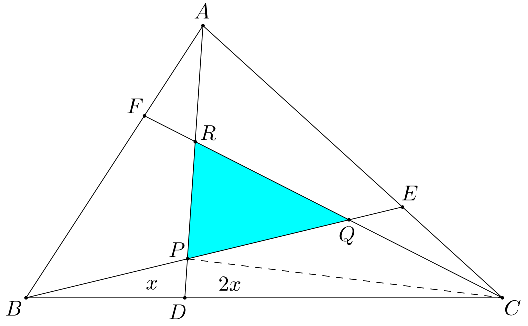
$$\begin{aligned}&\mathcal{A}(ABCDEFG) =\\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3 & 5\\ 0 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}5 & 10\\ 3 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}10 & 7\\ 1 & 5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}7 & 2\\ 5 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 6\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & 4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}\right|\\ &= \frac{1}{2}|9 - 25 + 43 + 4 + 10 + 4 - 12|\\ &= \frac{33}{2}.\end{aligned}$$

□

3 Áreas de triângulos determinados por cevianas

OBMEP

Estamos interessados no seguinte problema: *dados um triângulo ABC e cevianas AD, BE e CF como na figura abaixo,*



determinar a razão $\mathcal{A}(PQR)/\mathcal{A}(ABC)$, sendo $AD \cap BE = \{P\}, BE \cap CF = \{Q\}$ e $CF \cap AD = \{R\}$.

Segue um exemplo clássico.

Exemplo 9. *Nas notações acima, suponha que D, E e F dividam os lados de ABC na razão $1 : 2$, ou seja, $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = \frac{1}{2}$. Então, $\mathcal{A}(PQR)/\mathcal{A}(ABC) = 1/7$.*

Solução. Seja $S = \mathcal{A}(ABC)$. Utilizaremos, repetidas vezes, um fato simples: *a razão entre as áreas de dois triângulos de mesma altura é a razão entre as medidas das respectivas bases.* Assim,

$$\frac{\mathcal{A}(BCP)}{\mathcal{A}(PCE)} = \frac{BP}{PE} = \frac{\mathcal{A}(BPA)}{\mathcal{A}(PEA)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{A}(BCP)}{\mathcal{A}(BPA)} = \frac{\mathcal{A}(PCE)}{\mathcal{A}(PEA)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{\frac{S}{3} - x} = \frac{\mathcal{A}(BCP) + \mathcal{A}(PCE)}{\mathcal{A}(BPA) + \mathcal{A}(PEA)} = \frac{\mathcal{A}(BCE)}{\mathcal{A}(BEA)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{S}{21}.$$

Prova-se, de forma análoga, que os triângulos CEQ e AFR têm área $\frac{S}{21}$.

Somando as áreas dos triângulos ABD, BCE, CAF e PQR, vem $3(\frac{S}{3}) + \mathcal{A}(PQR) = S + 3(\frac{S}{21})$, de modo que $\mathcal{A}(PQR) = \frac{S}{7}$, ou seja, $\frac{\mathcal{A}(PQR)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{1}{7}$. □

O próximo resultado, uma generalização do exemplo anterior, nos permite expressar o quociente $\mathcal{A}(PQR)/\mathcal{A}(ABC)$ em termos das razões nas quais os pontos D, E e F dividem os lados de ABC (vide [2]). Na demonstração, utilizaremos o material desenvolvido na aula passada sobre coordenadas baricêntricas, em especial, a Proposição 8 e o Teorema 14.

Teorema 10 (Routh). *Sejam AD, BE e CF cevianas internas do triângulo ABC, tais que $AD \cap BE = \{P\}, BE \cap CF = \{Q\}$ e $CF \cap AD = \{R\}$. Se D, E e F dividem os lados BC, CA e AB nas razões k, l e m, respectivamente, então*

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \frac{(1 - klm)^2}{(kl + k + 1)(lm + l + 1)(mk + m + 1)}. \qquad (5)$$

Prova. Escreva $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$, de maneira que $\gamma/\beta = k$ e $\alpha/\gamma = l$, ou seja, $\gamma = k\beta$ e $\alpha = kl\beta$. Como $\alpha + \beta + \gamma = 1$, segue que $\beta = \frac{1}{kl+k+1}$, de onde se conclui que

$$P = \frac{kl}{kl + k + 1}A + \frac{1}{kl + k + 1}B + \frac{k}{kl + k + 1}C.$$

Portal OBMEP

De modo similar, temos

$$Q = \frac{lm}{lm+l+1}B + \frac{1}{lm+l+1}C + \frac{l}{lm+l+1}A$$

e

$$R = \frac{mk}{mk+m+1}C + \frac{1}{mk+m+1}A + \frac{m}{mk+m+1}B.$$

Portanto, utilizando a fórmula (8) da aula anterior e a homogeneidade do determinante, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{[PQR]}{[ABC]} &= \frac{\begin{vmatrix} kl & 1 & k \\ l & lm & 1 \\ 1 & m & mk \end{vmatrix}}{(kl+k+1)(lm+l+1)(mk+m+1)} \\ &= \frac{(klm)^2+1+klm-klm-klm-klm}{(kl+k+1)(lm+l+1)(mk+m+1)} \\ &= \frac{(1-klm)^2}{(kl+k+1)(lm+l+1)(mk+m+1)},\end{aligned}$$

como queríamos.

$\square$

Observação 11. *Perceba que as substituições* $k \mapsto \frac{1}{k}$, $l \mapsto \frac{1}{l}$ *e* $m \mapsto \frac{1}{m}$ *no 2º membro da relação* (5) *nos retorna a mesma expressão. A interpretação desse fato é a seguinte: se* $P'Q'R'$ *é o triângulo obtido a partir das cevianas* AD', BE' *e* CF'*, sendo* D', E' *e* F' *os simétricos de* D, E *e* F *relativamente aos respectivos pontos médios dos lados de* ABC*, então* $[PQR] = [P'Q'R']$.

É claro que o exemplo anterior é uma simples aplicação da fórmula (5): temos $k = l = m = 2$ (vide observação acima), de forma que $\mathcal{A}(PQR)/\mathcal{A}(ABC) = (1-2^3)^2/(2^2+2+1)^3 = 1/7$.

Observação 12. *O Teorema de Routh também generaliza o Teorema de Ceva: as cevianas* AD, BE *e* CF *são concorrentes se, e só se,* $[PQR] = 0$*, o que, pela fórmula* (5)*, significa* $\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}\frac{AF}{FB} = klm = 1$.

Portal OBMEP

4 Aplicação à elipse de Steiner

Dado um triângulo ABC, há uma infinidade de elipses inscritas nesse triângulo. Todavia, há uma única elipse inscrita em ABC tocando os lados desse triângulo nos pontos médios: a *elipse (inscrita) de Steiner* de ABC.

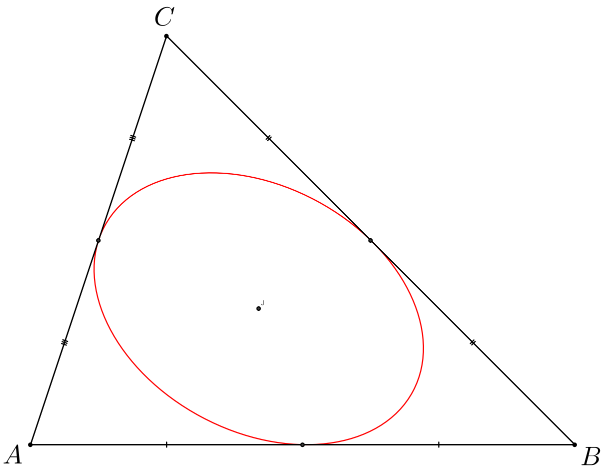


Figura 1: a elipse inscrita de Steiner de ABC.

Portal

Estabelecemos esse fato na aula *Composição* do módulo *Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria*. Encerraremos nossa aula provando o seguinte resultado de caracterização.

Teorema 13. *Dentre todas as elipses inscritas num triângulo, a elipse de Steiner é a de maior área.*

Precisaremos de dois lemas.

Lema 14. *Dado um triângulo* $A'B'C'$, *vale* $\operatorname{cotg}(A'/2) + \operatorname{cotg}(B'/2) + \operatorname{cotg}(C'/2) = \operatorname{cotg}(A'/2)\operatorname{cotg}(B'/2)\operatorname{cotg}(C'/2)$.

Prova. Basta utilizar que $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}(\alpha)\operatorname{cotg}(\beta)-1}{\operatorname{cotg}(\alpha)+\operatorname{cotg}(\beta)}$, com $\alpha = A'/2$ e $\beta = B'/2$, juntamente com o fato de que $A'/2 + B'/2 + C'/2 = \frac{\pi}{2}$ implica $\operatorname{cotg}(A'/2 + B'/2) = \operatorname{cotg}(\pi/2 - C'/2) = \operatorname{tg}(C'/2) = 1/\operatorname{cotg}(C'/2)$. $\square$

Lema 15. *Se p é o semiperímetro e r é o raio do círculo inscrito no triângulo $A'B'C'$, vale $\frac{p}{r} \geq 3\sqrt{3}$, com igualdade se, e só se, $A'B'C'$ é equilátero.*

Prova. Vamos utilizar o lema anterior e a desigualdade entre as médias (geométrica e aritmética). Note que

$$\begin{aligned}
\frac{p}{r} &= \operatorname{cotg}(A'/2) + \operatorname{cotg}(B'/2) + \operatorname{cotg}(C'/2) \\
&= \operatorname{cotg}(A'/2)\operatorname{cotg}(B'/2)\operatorname{cotg}(C'/2) \\
&\leq [\operatorname{cotg}(A'/2) + \operatorname{cotg}(B'/2) + \operatorname{cotg}(C'/2)]^3/27 \\
&= \frac{\left(\frac{p}{r}\right)^3}{27},
\end{aligned}$$

ou seja, $(p/r)^2 \geq 27$, com igualdade se, e só se, $\operatorname{cotg}(A'/2) = \operatorname{cotg}(B'/2) = \operatorname{cotg}(C'/2)$, o que equivale ao fato de $A'B'C'$ ser equilátero. $\square$

Podemos finalmente retornar à

Prova do Teorema (13). Dada uma elipse E inscrita em ABC, façamos como na demonstração do Teorema 14 da aula *Composição*: toma-se uma aplicação linear T transformando um triângulo $A'B'C'$ em ABC, ao mesmo tempo em que T transforma o círculo inscrito $\mathcal{C}$ de $A'B'C'$ em E. Pelo Teorema (3), temos

$$\frac{\mathcal{A}(E)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\det T \cdot \mathcal{A}(\mathcal{C})}{\det T \cdot \mathcal{A}(A'B'C')} = \frac{\pi r}{p} \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Vale a igualdade se, e só se, $A'B'C'$ é equilátero, o que equivale a afirmar que E é a elipse de Steiner E_S de ABC. Assim, em geral,

$$\mathcal{A}(E) \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{9}\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(E_S),$$

como desejado. $\square$

Portal OBMEP

Dicas para o Professor

No Exemplo (8) podemos aplicar o Teorema de Pick, enunciado na 2ª aula do módulo anterior, para calcular $\mathcal{A}(ABCDEFG)$: há 14 pontos da rede interiores ao polígono e os únicos pontos da rede na fronteira de $ABCDEFG$ são os próprios vértices, de modo que $\mathcal{A}(ABCDEFG) = 14 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{33}{2}$.

No portal da OBMEP temos uma série de módulos voltados ao estudo do *Cálculo* em uma variável. Grosso modo, essa disciplina, fundamental nas Ciências, é a formalização de uma ideia simples e poderosa: *uma solução de um problema não-linear é o "limite das soluções aproximantes" dos problemas lineares correlatos.* Por exemplo, aplicamos esse princípio quando dizemos que a área de um círculo é o limite das áreas dos polígonos regulares nele inscritos. Sugerimos a leitura do texto "De que Trata o Cálculo" na referência [3].

Mas porque estamos falando de Cálculo? Primeiro, para que a ideia acima funcione, devemos ser capazes de resolver os "problemas lineares correlatos". Isso se faz, essencialmente, na disciplina de *Álgebra linear*, conteúdo que temos estudado e, portanto, configura-se como disciplina coadjuvante no estudo do Cálculo. Essa importância é quase imperceptível na disciplina de Cálculo I (em uma variável), mas é manifesta nas disciplinas de Cálculo em várias variáveis. E, falando nisso, chegamos na segunda razão dessa digressão.

Nessa aula, obtivemos alguns resultados que são casos particulares importantes de teoremas consagrados do Cálculo em várias variáveis: o Corolário (3), caso particular da *fórmula da mudança de variável*, e a fórmula (4), proposição que admite como generalização o *Teorema de Green.* Na referência [4] você encontrará esses e muitos outros resultados do Cálculo multidimensional.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Portal OBMEP

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. *Coordenadas no Plano*. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

2. H. Coxeter. *Introduction to Geometry*. 2ª ed. John Wiley and Sons, 1969.

3. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

4. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 3. 6ª ed. LTC, 2018.

Portal OBMEP