

Material Teórico - Módulo de Geometria das Transformações Lineares

Vetores no Plano - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de Setembro de 2021

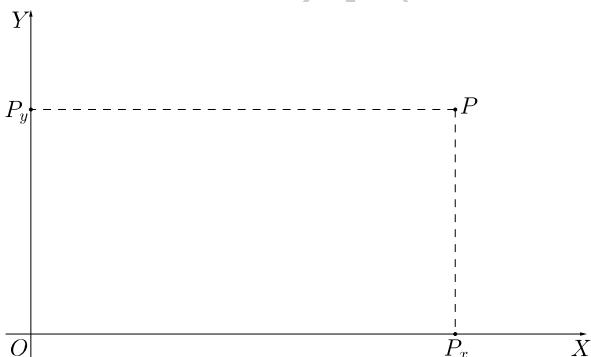


**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Nesta segunda parte, revisitaremos os conceitos já estudados sob um ponto de vista analítico, em contraste com o tratamento predominantemente geométrico da primeira aula. Estudaremos uma classe especial de transformações do plano, as *translações*, e encerraremos com algumas aplicações.

1 Coordenadas

Suponhamos que um sistema ortogonal de coordenadas OXY foi fixado no plano Π . Por um ponto P arbitrário passam as retas nas direções dos eixos, determinando os pontos P_x e P_y em OX e OY , respectivamente. As coordenadas desses pontos, nos respectivos eixos, chamam-se *coordenadas* de P : x , a coordenada de P_x , é a *abscissa* e y , a coordenada de P_y , é a *ordenada*. Assim, fica definida uma correspondência



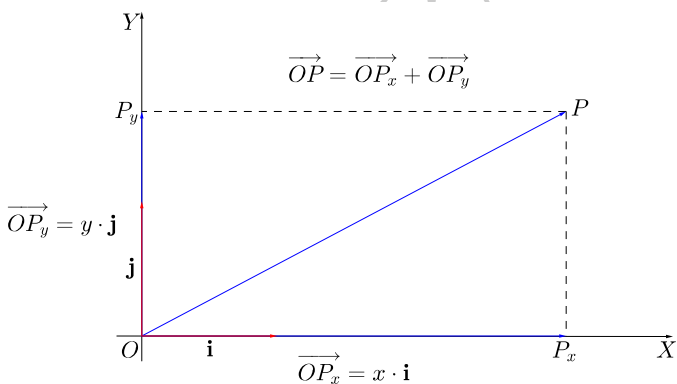
biunívoca $P \mapsto (x, y)$ entre o plano Π e o conjunto \mathbb{R}^2 dos pares ordenados de números reais. Escreveremos $P = (x, y)$ para indicar que x e y são as coordenadas de P .

Vamos interpretar as coordenadas de um ponto em termos de vetores (veja a discussão anterior ao Exemplo 12 da parte I). Sejam \mathbf{i} e \mathbf{j} os vetores unitários dos eixos OX e OY . Isso significa que \mathbf{i} e \mathbf{j} têm comprimento 1, direção e sentido

dos respectivos eixos. Portanto, $\mathbf{i} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{j} = \overrightarrow{OB}$, em que $A = (1,0)$, $B = (0,1)$. Utilizando a definição de coordenadas e com o auxílio da regra do paralelogramo, vemos que

Lema 1. $P = (x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$.

Demonstração. De fato, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'_x} + \overrightarrow{OP'_y}$, enquanto que a abscissa (resp. ordenada) de P é o único número real x (resp. y) satisfazendo $\overrightarrow{OP'_x} = x \cdot \mathbf{i}$ (resp. $\overrightarrow{OP'_y} = y \cdot \mathbf{j}$). Daí segue-se que $P = (x, y) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$. Reciprocamente, se $\overrightarrow{OP} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$, seja $P = (x', y')$. Da primeira parte, vale $\overrightarrow{OP} = x' \cdot \mathbf{i} + y' \cdot \mathbf{j}$, de onde vem $x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} = x' \cdot \mathbf{i} + y' \cdot \mathbf{j}$. Manipulando essa igualdade, concluímos que $(x - x') \cdot \mathbf{i} = (y' - y) \cdot \mathbf{j}$. Como os vetores \mathbf{i} e \mathbf{j} tem direções distintas, só pode ser $x - x' = 0 = y' - y$, isto é, $P = (x, y)$. \square



Antes da próxima definição, note que, dado um vetor v , existe um único ponto P no plano de modo que $v = \overrightarrow{OP}$. Se $v = \overrightarrow{AB}$, então P é o quarto vértice do paralelogramo de lados OA e AB (veja o Teorema 8 da parte I).

Definição 2. Dado um vetor v do plano, as coordenadas de v são as coordenadas do único ponto P no plano satisfazendo $\overrightarrow{OP} = v$. Se $P = (x, y)$, também escreveremos $v = (x, y)$.

Por exemplo, $0 = (0,0)$, $\mathbf{i} = (1,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$ e $\mathbf{i} + \mathbf{j} = (1,1)$.

Corolário 3. $v = (x, y) \Leftrightarrow v = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$.

Corolário 4. $v = (x, y) \Rightarrow \|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.¹

Teorema 5. *Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ vetores do plano. Então:*

(a) $u + v = (a + c, b + d)$.

(b) $k \cdot u = (ka, kb)$, qualquer que seja o número real k .

Demonstração. Como $u = a \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{j}$ e $v = c \cdot \mathbf{i} + d \cdot \mathbf{j}$, as propriedades das operações com vetores nos permitem escrever $u + v = (a + c) \cdot \mathbf{i} + (b + d) \cdot \mathbf{j}$ e $k \cdot u = (ka) \cdot \mathbf{i} + (kb) \cdot \mathbf{j}$. Mas isso é o mesmo que $u + v = (a + c, b + d)$ e $k \cdot u = (ka, kb)$. \square

Observação 6. *Comentamos na aula anterior que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real. Vemos do teorema acima que a identificação $V \ni v \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$, em que x, y são as coordenadas do vetor v , preserva tais operações. É nesse sentido que podemos considerar V e \mathbb{R}^2 “iguais”, enquanto espaços vetoriais.*

Para os próximos resultados, denote por x_P, y_P as coordenadas de um ponto P qualquer no plano.

Corolário 7. *Seja M o ponto médio do segmento AB . Então*

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Demonstração. Do Exemplo 15 da parte I, temos

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

As coordenadas do vetor no 1º membro são x_M, y_M . Por outro lado, pelo Teorema (5), o 2º membro tem coordenadas $\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}$. Seguem as igualdades. \square

¹ $\|v\|$ é o módulo do vetor v . Veja a parte I.

Dado um vetor $v = \overrightarrow{AB}$, podemos expressar as coordenadas de v em termos das coordenadas dos pontos A e B . É o que nos ensina a

Proposição 8. *Nas notações acima, $v = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.*

Demonstração. Se $v = (a, b)$, então $v = \overrightarrow{OP}$, sendo P o ponto de coordenadas a e b . Como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, os segmentos PA e OB tem o mesmo ponto médio (vide Teorema 8, parte I). Do Corolário (7), vem $\frac{a+x_A}{2} = \frac{x_B+0}{2}$ e $\frac{b+y_A}{2} = \frac{y_B+0}{2}$, de onde se conclui o desejado. \square

Observação 9. *Seja $v = \overrightarrow{AB}$. Da proposição anterior e dos Corolários (3) e (4), vemos que:*

$$(i) \quad v = (x_B - x_A) \cdot \mathbf{i} + (y_B - y_A) \cdot \mathbf{j}.$$

$$(ii) \quad \|v\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Observação 10. *A introdução de um sistema de coordenadas ortogonal no plano nos permite identificar, mutuamente, os conjuntos Π, V e \mathbb{C} . E mais, se $A \in \Pi, u \in V, z \in \mathbb{C}$ se correspondem, bem como $B \in \Pi, v \in V, w \in \mathbb{C}$, é fácil verificar que*

$$\overline{AB} = \|u - v\| = |z - w|. \quad (1)$$

$|t| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo do número complexo $t = a + bi$.

As igualdades em (1) nos sugerem definir a distância entre os vetores u e v (resp. entre os números complexos z e w) como $\|u - v\|$ (resp. $|z - w|$). Assim sendo, Π, V e \mathbb{C} tornam-se indistinguíveis do ponto de vista métrico. E qualquer aplicação $T : \Pi \rightarrow \Pi$, uma vez interpretada como uma aplicação de V em V (ou de \mathbb{C} em \mathbb{C}), terá as suas possíveis propriedades métricas devidamente traduzidas. Veja a próxima seção.

2 Translações e isometrias

Podemos pensar em vetores como entes que transportam pontos no plano. Na verdade, “vetor” deriva de *vehere* que,

em Latim, significa “transportar”. Com esse ponto de vista, se $v = \overrightarrow{AB}$, convém escrever $B = A + v$, ou $v = B - A$, entendendo que o ponto B é o resultado do transporte do ponto A pelo vetor v . A notação $B = A + v$ também é conveniente pela lembrança que nos traz da Proposição (8): as coordenadas de B são as coordenadas de A ordenadamente somadas às coordenadas de v .

Desse modo, fica definida uma aplicação $T_v : \Pi \rightarrow \Pi$, a *translação pelo vetor v* , dada por $T(P) = P + v$, para cada $P \in \Pi$. Notando que $T_v \circ T_u = T_{u+v}$, para quaisquer vetores $u, v \in V$, e $T_0 = \text{Id}$ (a aplicação identidade), vemos que cada translação T_v é uma bijeção com inversa T_{-v} .

No que segue, estabelecemos duas importantes propriedades das translações.

1. *Translações preservam distâncias.*

Quer dizer, se $P' = P + v, Q' = Q + v$, então $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$. Pois $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$, pelo Corolário 9 da parte I. Em particular, PQ e $P'Q'$ têm mesmo comprimento. (Logo mais, trataremos das transformações do plano que preservam distâncias, as chamadas *isometrias*.)

2. *Uma translação transforma uma reta no plano nela mesma ou numa outra reta que lhe é paralela.*

A fim de estabelecer essa propriedade, precisamos de alguma discussão preliminar. Sabemos que um ponto e uma direção determinam uma única reta. Em linguagem vetorial, se $u \neq 0$ é um vetor na direção da reta r que passa pelo ponto P_0 , então um ponto P no plano pertence a r se, e só se, $\overrightarrow{P_0P}$ é um múltiplo de u . Ou seja, $P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = t \cdot u$, para algum escalar t . Daí, temos a *equação vetorial da reta r* :

$$P = P_0 + t \cdot u, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Dizemos que u , ou qualquer múltiplo não nulo de u , é um *vetor diretor* da reta r . Perceba que duas retas são paralelas ou coincidentes se, e somente se, admitem vetores diretores de mesma direção.

A partir daqui, para demonstrar a segunda propriedade, seja r uma reta com equação dada por (2) e considere a translação T_v . Se $Q_0 = T_v(P_0)$, temos

$$\begin{aligned} T_v(P_0 + t \cdot u) &= (T_v \circ T_{t \cdot u})(P_0) \\ &= (T_{t \cdot u} \circ T_v)(P_0) \\ &= T_{t \cdot u}(Q_0) \\ &= Q_0 + t \cdot u. \end{aligned}$$

Portanto, se s é a reta de equação $Q = Q_0 + t \cdot u$, acabamos de mostrar que $T_v(r) = s$. Como u é um vetor diretor das retas r e s , segue-se que tais retas coincidem ou são paralelas.

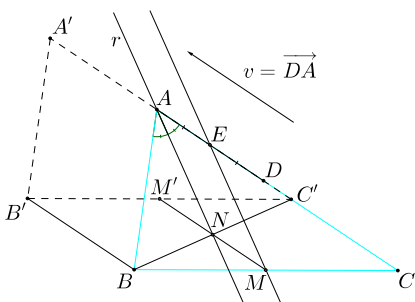
Observação 11. Na próxima aula, classificaremos as bijeções do plano que transformam retas em retas, preservando a direção (há mais do que translações apenas).

Exemplo 12. Sejam ABC um triângulo e E o ponto no qual a paralela à bissetriz do ângulo BAC , pelo ponto médio M de BC , corta o lado AC . Se $D \in AC$ é tal que E é o ponto médio de AD , mostre que $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Demonstração. Translade o triângulo ABC por meio do vetor $v = \overrightarrow{DA}$, obtendo o triângulo $A'B'C'$ (acompanhe na figura a seguir). Como $\overline{CD} = \overline{C'A}$, devemos provar que ABC' é um triângulo isósceles de base BC' . Para isso, basta mostrar que a bissetriz que sai de A nesse triângulo também é mediana. Ora, se r é a reta suporte dessa bissetriz, então r é a translação da reta \overleftrightarrow{EM} por $\frac{1}{2} \cdot v$. Em particular, $N := M + \frac{1}{2} \cdot v \in r$. Agora, $M' := M + v$ é o ponto médio de $B'C'$, de onde segue que N é o ponto médio de MM' . Por outro lado, sendo $BMC'M'$ um paralelogramo, as diagonais BC' e MM' cruzam-se ao meio, ou seja, r passa pelo ponto médio de BC' , como queríamos. \square

A seguinte observação se mostrará útil.

Observação 13. Toda aplicação $T : \Pi \rightarrow \Pi$ pode ser vista como uma aplicação $T^V : V \rightarrow V$, ou ainda $T^C : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$



(e vice-versa). Pois, se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são as coordenadas de $T(P)$, imagem do ponto P de coordenadas x e y , então $T^V(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OT(P)}$ e $T^C(x + yi) = f(x, y) + g(x, y)i$. Com o intuito de simplificar a notação, denotaremos uma aplicação e as suas versões pela mesma letra.

Para efeito de ilustração, T_v torna-se uma aplicação de V em V (resp. \mathbb{C} em \mathbb{C}) definida por $T_v(u) = u + v$ (resp. $T_v(z) = z + w$, em que $w = a + bi$ se $v = (a, b)$).

Agora convém falar um pouco das *isometrias* do plano.

Definição 14. Uma transformação do plano (no plano) é dita uma *isometria* se preserva distâncias. Mais precisamente, dizemos que $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma isometria se $\overline{T(P)T(Q)} = \overline{PQ}$, para quaisquer $P, Q \in \Pi$.

Como já visto, translações são isometrias.

O nosso próximo teorema classifica as isometrias do plano. Para tal, perceba que uma isometria nada mais é do que uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $|f(z) - f(w)| = |z - w|$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ (veja as Observações (10) e (13)).

Teorema 15. Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma isometria se, e só se, existem constantes $a, b \in \mathbb{C}$, com $|a| = 1$, tais que uma das alternativas a seguir se verifica:

(i) $f(z) = az + b$, para todo $z \in \mathbb{C}$;

(ii) $f(z) = a\bar{z} + b$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Numa próxima aula, interpretaremos esse resultado geometricamente (veja a referência [4]).

Lema 16. *Sejam z e w números complexos. Então:*

(i) $|z| = |w|$ e $|z - 1| = |w - 1| \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)$.

(ii) $|z| = |w|$ e $|z - i| = |w - i| \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$.

Portanto, em qualquer um dos casos, vale $z = w$ ou $z = \bar{w}$.

Demonstração. Deixaremos os detalhes para o leitor. Por exemplo, no item (i),

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(z) - 1 &= |z|^2 - |z - 1|^2 \\ &= |w|^2 - |w - 1|^2 \\ &= 2 \operatorname{Re}(w) - 1. \end{aligned}$$

O segundo item é análogo. □

Demonstração do Teorema (15). Se f é dada como no teorema, então $f(z) - f(w) = a(z - w)$ ou $f(z) - f(w) = a(\overline{z - w})$. Como o módulo de um número complexo coincide com o módulo do seu conjugado, a multiplicatividade da função módulo nos dá $|f(z) - f(w)| = |z - w|, \forall z, w \in \mathbb{C}$, ou seja, f é uma isometria. Dividiremos a recíproca em casos.

1º caso: se $f(0) = 0, f(1) = 1$ e $f(i) = i$, então $f = \operatorname{Id}$.

Com efeito, vale $|z| = |f(z)|, |z - 1| = |f(z) - 1|$ e $|z - i| = |f(z) - i|$, já que f é uma isometria. Do Lema (16), com $w = f(z)$, vem $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(f(z))$ e $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(f(z))$, isto é, $f(z) = z$.

2º caso: f é uma isometria arbitrária.

Seja $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = (f(z) - b)/a$, em que $b = f(0)$ e $a = f(1) - f(0)$. Como $|a| = 1$, é fácil ver que g ainda é uma isometria. Mais ainda, $g(0) = 0, g(1) = 1$. Afirmamos

que $g(i) = \pm i$. De fato, como $|g(i)| = |i|$ e $|g(i) - 1| = |i - 1|$, o lema acima nos dá $g(i) = i$ ou $g(i) = \bar{i} = -i$. Do 1º caso, vemos que g é a identidade, $g(z) = z$, ou a função conjugação, $g(z) = \bar{z}$. Sendo $f(z) = ag(z) + b$, conclui-se o resultado. \square

Corolário 17. *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano. Então, ABC e $A'B'C'$ são congruentes se, e somente se, existe uma isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi$ satisfazendo $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ e $T(C) = C'$.*

Demonstração. Como isometrias preservam distâncias, se existe uma aplicação T como no enunciado, então ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo critério LLL. Vejamos a recíproca. Inicialmente, suponha $A = A'$. Escolhendo um sistema de coordenadas com origem em A , os pontos B, C, B' e C' são os afijos dos números complexos b, c, b' e c' , respectivamente. Como ABC é congruente a $A'B'C'$, vale $|b| = |b'|$, $|c| = |c'|$ e $|b - c| = |b' - c'|$. Daí segue que $|\frac{b}{c}| = |\frac{b'}{c'}|$ e $|\frac{b}{c} - 1| = |\frac{b'}{c'} - 1|$. Pelo Lema (16), temos $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ ou $\frac{b}{c} = \frac{\overline{b'}}{c'}$, isto é, $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ ou $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. No primeiro caso, tome $f(z) = az$, $a = \frac{b'}{b}$, e no segundo, $f(z) = a\bar{z}$, $a = \frac{b'}{b}$. Em qualquer caso, temos uma isometria $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $f(0) = 0$, $f(b) = b'$ e $f(c) = c'$. Portanto, existe uma isometria transformando ABC em $A'B'C'$.

Para o caso geral, seja $A'B''C''$ a imagem do triângulo ABC pela translação T_v , em que $v = \overrightarrow{AA'}$. Do caso anterior, existe uma isometria S do plano que leva $A'B''C''$ em $A'B'C'$. Assim, $T = S \circ T_v$ é uma isometria transformando ABC em $A'B'C'$. \square

Com a definição (14), podemos enunciar com rigor a noção de igualdade entre figuras planas: dizemos que F e F' , subconjuntos do plano, são *congruentes* se existe uma isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi$ aplicando F sobre F' , isto é, $T(F) = F'$. Como vimos, dois triângulos são congruentes no sentido clássico se, e só se, são congruentes segundo a definição anterior. Isso nos dá uma ideia do quão relevantes são as isometrias para o estudo da Geometria.

3 Aplicações

Exemplo 18. Dado um polígono $P = A_1A_2 \dots A_n$, mostre que existe um único ponto G no plano satisfazendo

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n} = 0. \quad (3)$$

G chama-se baricentro de P .

Demonstração. Em coordenadas, a equação (3) se expressa como

$$\left(\sum_{i=1}^n x_{A_i} - nx_G, \sum_{i=1}^n y_{A_i} - ny_G \right) = (0, 0).$$

Portanto, $G = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_{A_i}}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n y_{A_i}}{n} \right)$ é o ponto requerido. \square

Sejam $P = A_1A_2 \dots A_n$ um polígono regular e O o seu centro, isto é, O é o centro do círculo circunscrito de P . O próximo exemplo mostrará que O é o baricentro de P .

Exemplo 19. Nas notações acima, vale

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = 0. \quad (4)$$

Solução. Se $n = 2k$ é par, então $\overrightarrow{OA_{k+i}} = -\overrightarrow{OA_i}$, para cada $i = 1, 2, \dots, k$, de onde segue (4).

Se n é ímpar, considere o polígono $P' = A_1B_1A_2B_2 \dots A_nB_n$, em que B_i é o ponto médio do arco $A_i\widehat{A_{i+1}}$ do circuncírculo de P , $i = 1, 2, \dots, n$ ($A_{n+1} := A_1$). Existe um real positivo $\lambda = \lambda(n)$ tal que $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{i+1}} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB_i}$, para todo i . Portanto, pelo caso anterior aplicado a P' ,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OB_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} + \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{i+1}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} + \frac{2}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \end{aligned}$$

$$= \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) \cdot \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i}.$$

Conclui-se que $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = 0$, como queríamos. \square

Relembre o seguinte resultado (cf. [1]): *a mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos no plano que equidistam dos extremos do segmento.* Dessa proposição, segue facilmente que as mediatrizes de um triângulo concorrem num ponto, denominado *circuncentro*. Observe que o circuncentro é o centro do círculo circunscrito ao triângulo.

Exemplo 20. *Seja ABC um triângulo de circuncentro O . Prove que:*

- (i) *As alturas concorrem num ponto H , o ortocentro de ABC .*
- (ii) *(Euler) $\overrightarrow{CH} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$, sendo M o ponto médio de AB .*
- (iii) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Demonstração. Provaremos (i) e (ii) de uma vez só. Para isso, defina H pela igualdade $\overrightarrow{CH} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$. Como $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AB}$, H já pertence à altura relativa ao vértice C . Para terminar, precisamos provar que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$. Será suficiente estabelecer as igualdades $\overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{BH} = 2 \cdot \overrightarrow{ON}$, em que N e P são os pontos médios dos lados AC e BC , respectivamente. Ora, levando em conta o Exemplo 15 da parte I, temos $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 2 \cdot \overrightarrow{ON}$. Portanto, $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 2 \cdot \overrightarrow{ON}$. A igualdade $\overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OP}$ pode ser provada de modo similar.

Quanto a (iii), já vimos acima que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Sendo $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC}$, conclui-se que $\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, e a relação segue. \square

Exemplo 21 (Euler). *Seja ABC um triângulo de baricentro G , circuncentro O e ortocentro H . Então, $\overrightarrow{GH} = 2 \cdot \overrightarrow{OG}$, isto*

é, O, G e H estão alinhados e G divide o segmento HO na razão $2 : 1$.

Demonstração. Vamos somar membro a membro as duas igualdades $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ e $0 = \vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG}$, obtendo $\vec{OH} = 3 \cdot \vec{OG}$. Daí, $\vec{OG} + \vec{GH} = 3 \cdot \vec{OG} \Rightarrow \vec{GH} = 2 \cdot \vec{OG}$, c.q.d. \square

Observação 22. A reta que passa por O, G e H chama-se reta de Euler do triângulo ABC .

Dicas para o Professor

É provável que a sua turma já tenha alguma experiência com Geometria Analítica. Numa das vias dessa disciplina, utilizamos Álgebra para resolver problemas de Geometria. Parece razoável, portanto, aceitar que há uma relação direta entre “poderio algébrico” e “benefício geométrico”. Nesse contexto, sugerimos, gradualmente, a utilização do conjunto dos números complexos como mais uma ferramenta na resolução de problemas geométricos. A vantagem reside na formidável interpretação que a multiplicação de números complexos possui: $\mathbb{C} \ni z \mapsto z_0 \cdot z \in \mathbb{C}$ é uma *roto-homotetia*, composta da rotação de ângulo $\arg(z_0)$ com a homotetia de razão $|z_0|$, ambas centradas na origem (veja [3]; falaremos de homotetias em materiais futuros).

Nas próximas aulas, continuaremos explorando as identificações entre Π, V e \mathbb{C} .

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol.*
2. *Geometria Euclidiana Plana.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

2. E. L. Lima. *Coordenadas no Plano*. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 6. Polinômios*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
4. E. L. Lima. *Isometrias*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

Portal OBMEP