Material Teórico - Módulo Quadriláteros

Quadriláteros Inscritos e Circunscritos

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

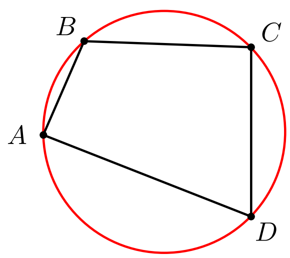
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

22 de junho de 2019

1 Quadriláteros inscritíveis

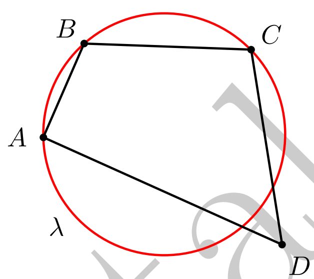
Neste material, sempre que utilizarmos o nome *quadrilátero*, estaremos invariavelmente nos referindo a um quadrilátero *convexo*.

Dizemos que um quadrilátero é **inscritível** quando existe um círculo que contém seus vértices. A figura a seguir mostra um quadrilátero inscritível $ABCD$.



Um círculo que contém os vértices de um quadrilátero inscritível $ABCD$ é dito **circunscrito** ao quadrilátero. Nesse caso, tal círculo é único, uma vez que ele também é o círculo circunscrito ao triângulo ABC, por exemplo, e o círculo circunscrito a um triângulo é único.

Agora, considere um triângulo ABC qualquer e o círculo λ que o circunscreve. Em seguida, tome um ponto D que não pertence a λ (veja a próxima figura). Então, o quadrilátero $ABCD$ não é inscritível, pois, se o fosse, seu círculo circunscrito deveria coincidir com λ, e deveríamos ter $D \in \lambda$, o que não é o caso.



O primeiro resultado que apresentamos nesse material é um critério que nos permite saber quando um quadrilátero é inscritível a partir de uma relação entre as medidas dos seus ângulos internos.

Teorema 1. *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é inscritível se, e somente se, possui um par de ângulos opostos cujas medidas somam 180°.*

Prova. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de lados AB, BC, CD e DA. Mostraremos que $A\widehat{B}C + A\widehat{D}C = 180^\circ$. Com efeito, pelo Teorema do Ângulo Inscrito, temos (acompanhe na próxima figura):

$$A\widehat{B}C = \frac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{ADC} \quad \text{e} \quad A\widehat{D}C = \frac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{ABC}\,.$$

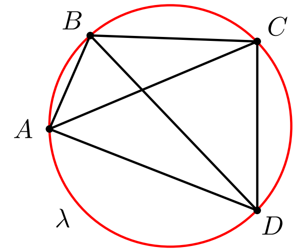


Figura 1: $ABCD$ inscritível $\Rightarrow A\widehat{B}C + A\widehat{D}C = 180^\circ$.

Além disso,

$$\overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{ABC} = 360^\circ.$$

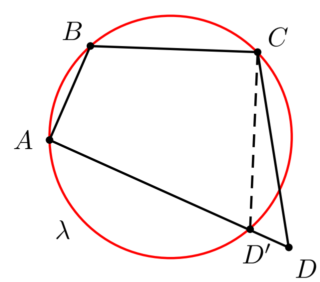
Logo,

$$\begin{aligned} A\widehat{B}C + A\widehat{D}C &= \frac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{ADC} + \frac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{ABC} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{ABC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 360^\circ \\ &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $A\widehat{B}C + A\widehat{D}C = 180^\circ$. Considere o círculo λ que circunscreve o triângulo ABC. Mostraremos que D também está sobre λ.

Argumentando por contradição, suponhamos que isso não acontece. Desse modo, ocorre uma das seguintes possibilidades:

(i) D está no exterior de λ. Neste caso, seja D' a interseção de AD com o círculo λ, conforme mostrado na figura a seguir.



Então, $ABCD'$ é um quadrilátero inscritível, de sorte que, utilizando a parte já provada do teorema, obtemos

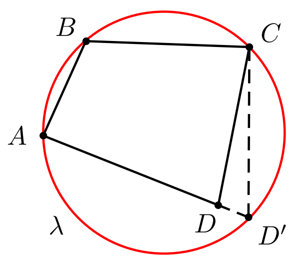
$$A\widehat{B}C + A\widehat{D'}C = 180^\circ.$$

Uma vez que

$$A\widehat{B}C + A\widehat{D}C = 180^\circ$$

por hipótese, comparando as duas relações acima concluímos que $A\widehat{D}C = A\widehat{D'}C$. Acontece que $\angle AD'C$ é um ângulo externo do triângulo CDD'; assim, pelo Teorema

do Ângulo Externo, temos $A\widehat{D'}C > A\widehat{D}C$, o que é uma contradição.
(ii) D está no interior de λ. O argumento é similar ao que foi feito no item anterior: seja D' o ponto de interseção entre λ e o prolongamento do segmento AD. Mais uma vez utilizando a hipótese e a primeira parte do teorema, obtemos $A\widehat{D}C = A\widehat{D'}C$. Agora, veja que $\angle ADC$ é ângulo externo ao triângulo $CD'D$, logo, $A\widehat{D}C > A\widehat{D'}C$. Novamente, temos uma contradição.



□

Observe que, como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $360°$, se $ABCD$ possui um par de ângulos opostos cujas medidas somam $180°$, então as medidas do outro par de ângulos opostos também tem soma igual a $180°$.

Vejamos algumas aplicações do Teorema 1. A primeira delas é uma consequência simples, a qual decorre imediatamente da figura 1 e do Teorema do Ângulo Inscrito.

Corolário 2. *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de lados AB, BC, CD, DA. Então, os vértices A e D vêem o lado BC sob ângulos iguais, isto é,*

$$B\widehat{A}C = B\widehat{D}C.$$

Prova. Nas notações da figura 1, segue do Teorema do Ângulo Inscrito que

$$B\widehat{A}C = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BC} = B\widehat{D}C.$$

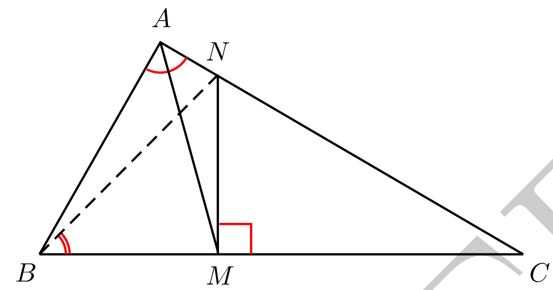
□

Exemplo 3. *Na figura a seguir, ABC é um triângulo retângulo (em A), AM é a bissetriz do ângulo $\angle BAC$ e MN é perpendicular a BC. Qual é a medida do ângulo $\angle MBN$?*

Solução. Uma vez que $B\widehat{A}N = B\widehat{M}N = 90°$, obtemos

$$B\widehat{A}N + B\widehat{M}N = 90° + 90° = 180°.$$

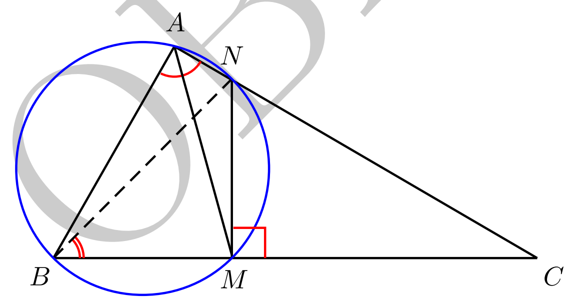
Daí, utilizando o Teorema 1, concluímos que o quadrilátero $ABMN$ é inscritível.



Portanto, o corolário anterior garante que A e B vêem MN sob um mesmo ângulo, isto é,

$$M\widehat{B}N = M\widehat{A}N.$$

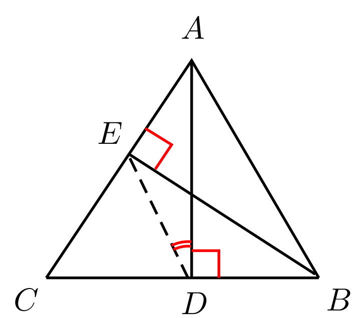
Mas, como AM é bissetriz de $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{A}C = 90°$, temos que $M\widehat{A}N = 45°$. Assim, concluímos que $M\widehat{B}N = 45°$.



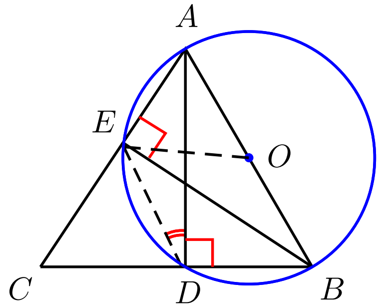
□

O próximo exemplo não aplica diretamente o Teorema 1, mas aplica as ideias aplicadas em sua prova.

Exemplo 4. *No triângulo ABC da figura abaixo, $B\widehat{A}C = 64°$ e D e E são os pés das alturas relativas aos lados BC e AC, respectivamente, de sorte que $A\widehat{E}D = 90°$ e $A\widehat{B}D = 90°$. Encontre a medida do ângulo $\angle ADE$.*



Solução. Como $A\widehat{E}B = A\widehat{D}B = 90°$, esses ângulos estão inscritos no círculo de diâmetro AB (de fato, D e E pertencem ao arco capaz de $90°$ em relação a AB – veja a próxima figura).



Então, $ABDE$ é um quadrilátero inscritível, e o corolário garante que D e E vêem AB sob um mesmo ângulo, isto é,

$$A\widehat{D}E = A\widehat{B}E.$$

Agora, no triângulo retângulo ABE, temos

$$A\widehat{B}E + B\widehat{A}E = 90^\circ.$$

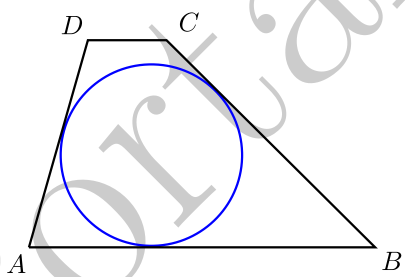
Mas, como $B\widehat{A}E = 64^\circ$, segue que

$$A\widehat{B}E = 90^\circ - B\widehat{A}E = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ.$$

□

2 Quadriláteros circunscritíveis

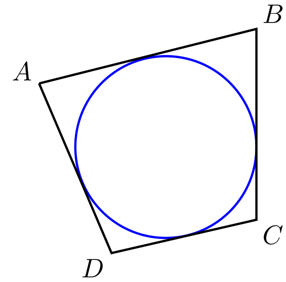
Se existe um círculo tangente a todos os lados de um quadrilátero dado, dizemos que o quadrilátero é **circunscritível**. A figura abaixo mostra um exemplo de quadrilátero não circunscritível. De fato, como existe um círculo que tangencia os lados AB, AD e BC, esse círculo é o círculo inscrito no triângulo que tem como vértices os pontos A, B e a interseção dos prolongamentos de AD e BC. Logo, não pode haver um círculo que tangencie os quatro lados de $ABCD$ simultaneamente.



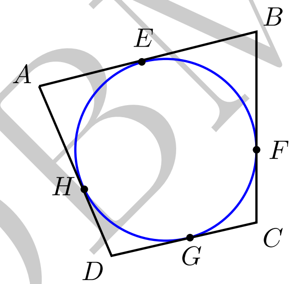
O próximo resultado, conhecido como Teorema de Pitot, fornece uma caracterização dos quadriláteros circunscritíveis.

Teorema 5 (Pitot). *Um quadrilátero $ABCD$ de lados AB, BC, CD e DA é circunscritível se, e somente se,*

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}.$$



Prova. Se $ABCD$ é circunscritível, sejam E, F, G e H os pontos de tangência do círculo inscrito com os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente.



Como sabemos, as distâncias de um ponto exterior a um círculo aos pontos de contato das tangentes traçadas ao círculo a partir do ponto são as mesmas (esse é o contéudo do Teorema do Bico). Nas notações da figura anterior, isso nos dá $\overline{AE} = \overline{AH}$, $\overline{BE} = \overline{BF}$, $\overline{CF} = \overline{CG}$ e $\overline{DG} = \overline{DH}$. Portanto,

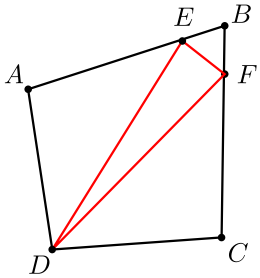
$$\begin{aligned}
\overline{AB} + \overline{CD} &= (\overline{AE} + \overline{BE}) + (\overline{CG} + \overline{DG})\\
&= (\overline{BE} + \overline{CG}) + (\overline{AE} + \overline{DG})\\
&= (\overline{BF} + \overline{CF}) + (\overline{AH} + \overline{DH})\\
&= \overline{BC} + \overline{AD}.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $ABCD$ é um quadrilátero de lados AB, BD, CD e DA, satisfazendo a relação $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$.

Inicialmente, analisaremos o caso em que $\overline{AB} > \overline{AD}$. Então, a igualdade acima entre as somas dos comprimentos dos pares de lados opostos garante que $\overline{BC} > \overline{CD}$. Portanto (veja a próxima figura), existem pontos E sobre AB e F sobre BC tais que $\overline{AE} = \overline{AD}$ e $\overline{CF} = \overline{CD}$.

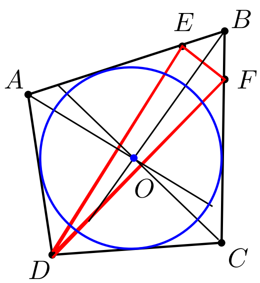
Então, os triângulos DAE e DCF são isósceles. Além disso,

$$\begin{aligned}
\overline{EB} &= \overline{AB} - \overline{AE}\\
&= \overline{AB} - \overline{AD}\\
&= \overline{BC} - \overline{CD}\\
&= \overline{BC} - \overline{CF}\\
&= \overline{BF},
\end{aligned}$$



ou seja, o triângulo EBF também é isósceles.

Agora, seja O o circuncentro do triângulo DEF. Veja que a mediatriz do lado EF coincide com a bissetriz do ângulo $\angle EBF$, pois o triângulo EBF é isósceles. Analogamente, a mediatriz de DE é a bissetriz do ângulo $\angle DAE$ e a mediatriz de DF é a bissetriz do ângulo $\angle DCF$.

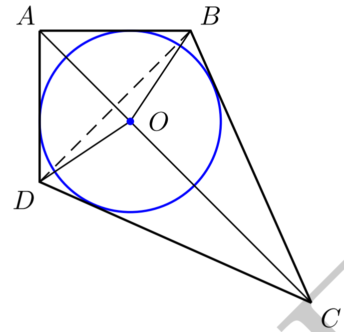


Finalmente, observe que, como a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo, temos que

$$\begin{aligned} d(O;\,\overleftrightarrow{AD}) &= d(O;\,\overleftrightarrow{AB}),\\ d(O;\,\overleftrightarrow{CD}) &= d(O;\,\overleftrightarrow{BC}),\\ d(O;\,\overleftrightarrow{AB}) &= d(O;\,\overleftrightarrow{BC}). \end{aligned}$$

Portanto, O equidista de todos os lados de $ABCD$ e, sendo r essa distância comum, temos que o círculo de centro O e raio r tangencia os lados de $ABCD$. Assim, $ABCD$ é circunscritível.

O caso $\overline{AD} > \overline{AB}$ pode ser tratado de modo análogo. Já o caso $\overline{AB} = \overline{AD}$ é um pouco diferente, porque no lugar do triângulo EDF aparece um único segmento, que é a diagonal BD (veja a próxima figura). Observe que, como $\overline{AB} = \overline{AD}$ e $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$, devemos ter também $\overline{BC} = \overline{CD}$. Portanto, os triângulos ABD e CBD são isósceles e, desse modo, as bissetrizes dos ângulos $\angle BAD$ e $\angle BCD$ coincidem com a mediatriz de BD. Assim, essas duas bissetrizes coincidem (e correspondem à diagonal AC). Por outro lado, os triângulos ABC e ADC são congruentes (caso LLL) e têm o lado AC em comum. Portanto, as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ encontram-se no ponto O sobre a diagonal AC. O ponto O é o centro do círculo tangente aos lados de $ABCD$. Deixamos detalhes deste último caso ao leitor, como exercício.



$\square$

Exemplo 6. *Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível de lados AB, BC, CD e AD, tal que $\overline{AB} = x+7$, $\overline{BC} = 2x+5$, $\overline{CD} = 4x+2$ e $\overline{AD} = x+8$. Calcule o perímetro de $ABCD$.*

Solução. Uma vez que $ABCD$ é circunscritível, utilizando o Teorema de Pitot, obtemos

$$\begin{aligned} &\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD} \Longrightarrow\\ &\Longrightarrow (x+7) + (4x+2) = (2x+5) + (x+8)\\ &\Longrightarrow 5x+9 = 3x+13\\ &\Longrightarrow 2x = 4\\ &\Longrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Portanto, o perímetro de $ABCD$ é igual a

$$\begin{aligned} &\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} =\\ &= (x+7) + (2x+5) + (4x+2) + (x+8)\\ &= 8x+22\\ &= 8\cdot 2 + 22\\ &= 38. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7. *O perímetro do triângulo ABC desenhado na figura a seguir é igual a $30\,cm$. Além disso, a medida do lado BC é igual a $7\,cm$. Encontre o perímetro do triângulo ADE.*

Solução. Observe inicialmente que, a partir de

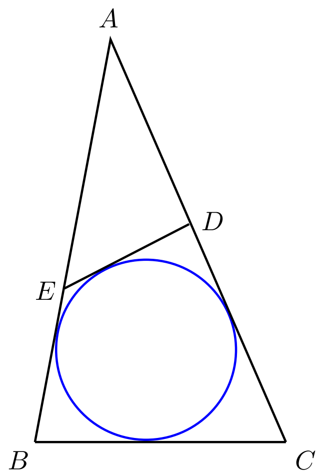
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 30$$

e

$$\overline{BC} = 7$$

obtemos

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 30 - 7 = 23.$$

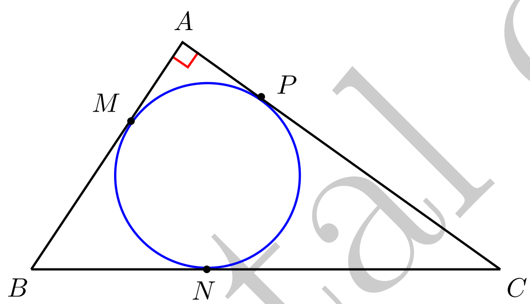


Agora, utilizando o Teorema de Pitot, vem que:

$$\begin{aligned}
&\overline{DE} + \overline{BC} = \overline{BE} + \overline{CD} \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\ &\overline{DE} + \overline{BC} = \left(\overline{AB} - \overline{AE}\right) + \left(\overline{AC} - \overline{AD}\right) \\
\Longrightarrow\ &\overline{DE} + \overline{AE} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC} \\
\Longrightarrow\ &\overline{DE} + \overline{AE} + \overline{AD} = 23 - 7 = 16.
\end{aligned}$$

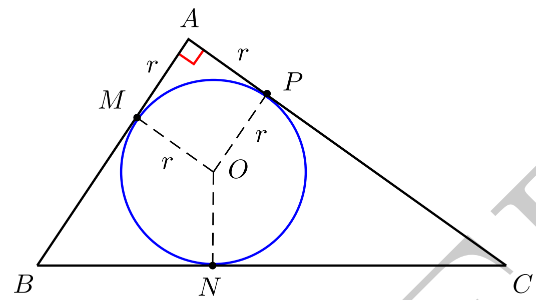
□

Exemplo 8. *Na figura seguinte, o perímetro do triângulo retângulo ABC é igual a* 30 *e a hipotenusa BC mede* 13. *Calcule o raio r do círculo inscrito em ABC.*



Solução. Denotemos por O o centro do círculo inscrito em ABC, b a medida do lado AC, c a medida do lado AB e por a a medida da hipotenusa BC (veja a próxima figura).

Observe que, no quadrilátero $AMOP$, os ângulos internos $\angle MAP$, $\angle APO$ e $\angle AMO$ são todos retos, o primeiro por hipótese e os outros dois porque são ângulos formados por raio e reta tangente. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $360°$, o ângulo $\angle MOP$ também é reto. Logo, $AMOP$ é um retângulo. Mas, como $\overline{OP} = \overline{OM} = r$, temos que $AMOP$ é um retângulo com lados adjacentes iguais, ou seja, é um quadrado de lado r. Assim, $\overline{AP} = \overline{AM} = r$.



Daí, obtemos

$$\overline{BN} = \overline{BM} = \overline{AB} - \overline{AM} = c - r$$

e

$$\overline{CN} = \overline{CP} = \overline{AC} - \overline{AP} = b - r.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
13 = \overline{BC} &= \overline{BN} + \overline{CN} \\
&= (c - r) + (b - r) \\
&= b + c - 2r.
\end{aligned}$$

Por fim, a partir de $a + b + c = 30$ e $a = 13$, obtemos $b + c = 30 - 13 = 17$. Finalmente, substituindo o valor de $b + c$ na equação obtida acima para r, segue que $2r = 17 - 13 = 4$, ou seja, $r = 2$. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor todo o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que, antes de apresentarem as demonstrações, revisem com os alunos o Teorema do Ângulo Inscrito, o conceito de arco capaz e o Teorema do Ângulo Externo. É importante que todas as demonstrações sejam apresentadas com todos os detalhes, para que não restem dúvidas. Recomendamos, ainda, que seja dada uma atenção especial à demonstração do Teorema de Pitot, pois ela contém alguns detalhes que podem ser de difícil entendimento. Ao apresentar os exemplos, ressalte os momentos nos quais os teoremas são utilizados, pois isso faz com que os alunos percebam a importância desses resultados, bem como a organicidade da Matemática.

As referências listadas a seguir trazem outros exemplos e aplicações dos resultados apresentados neste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.