Material Teórico - Módulo Inequações Mistas e Sistemas

Sistemas de inequações do segundo grau

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de julho de 2020

1 Sistemas de inequações

Neste material, outra vez utilizaremos os conhecimentos adquiridos no módulo sobre inequações do segundo grau, desta vez para estudar sistemas de inequações do segundo grau. Iniciamos com o seguinte exemplo:

Exemplo 1. *Resolva, em $\mathbb{R}$, o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 1 > 0 \end{cases}$$

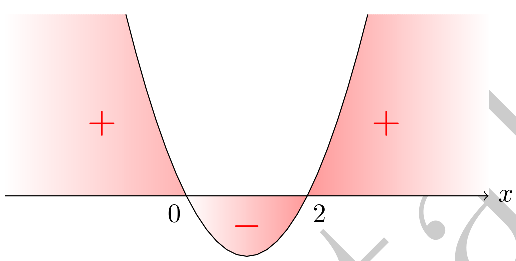
Solução. Uma vez que queremos encontrar todos os $x \in \mathbb{R}$ que satisfaçam *ambas* as inequações, o **conjunto-verdade** do sistema de inequações é dado pela interseção dos conjuntos-verdade das inequações que o formam.

Então, repetindo o procedimento feito nos módulos sobre inequações produto e quociente, vamos analisar, separadamente, os sinais das funções quadráticas $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = -x^2 + 1$.

Veja que

$$x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(x-2) = 0.$$

Desse modo, $f(x)$ tem raízes iguais a 0 e 2. Além disso, como o coeficiente de x^2 em $x^2 - 2x$ é igual a 1, que é positivo, o gráfico de f é uma parábola aberta para cima. Veja um esboço do gráfico de f na figura abaixo:



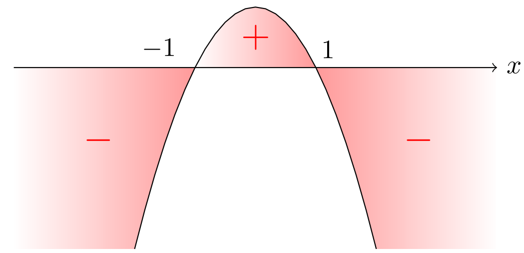
Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2 + 1 \\ &= -\left(x^2 - 1\right) \\ &= -\left(x^2 - 1^2\right) \\ &= -(x+1)(x-1). \end{aligned}$$

Assim, g possui raízes iguais a -1 e 1 e, uma vez que o coeficiente de x^2 na expressão algébrica que define g é -1, que é um número negativo, o gráfico de g é uma parábola aberta para baixo. A próxima figura esboça esse gráfico.

No diagrama seguinte, destacamos os conjuntos-verdade das inequações $x^2 - 2x \geq 0$ e $-x^2 + 1 > 0$. Recordando que a interseção desses dois conjuntos é o conjunto-verdade do sistema, concluímos que o conjunto-verdade do sistema

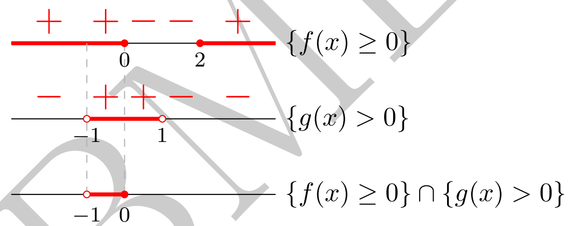
$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 1 > 0 \end{cases}$$



é o conjunto

$$V = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 0\} = (-1{,}0].$$

Note que $x = -1$ foi excluído, pois a inequação $x^2 - 1 > 0$ é estrita.



□

Exemplo 2. *Resolva o sistema abaixo em $\mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

Solução. Analisemos os sinais das funções quadráticas $f(x) = x^2 + 2x - 3$ e $g(x) = x^2 - 4$ separadamente.

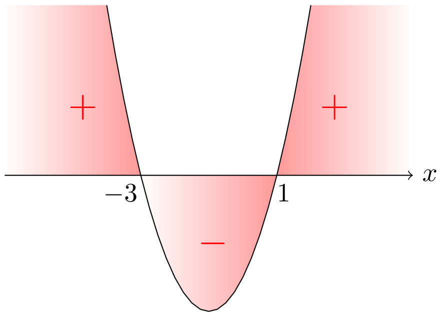
Podemos encontrar as raízes de $f(x)$ utilizando algum dos métodos que foram estudados no módulo sobre funções quadráticas. Uma possibilidade é fatorar $x^2 + 2x - 3$ diretamente:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x - 3 \\ &= x^2 + 3x - x - 3 \\ &= x(x+3) - (x+3) \\ &= (x+3)(x-1). \end{aligned}$$

Assim, $f(x)$ possui raízes iguais a -3 e 1. (Outra possibilidade seria utilizar a fórmula de Báskara para obter

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1(-3)}}{2 \cdot 1} \\ &\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } 1.) \end{aligned}$$

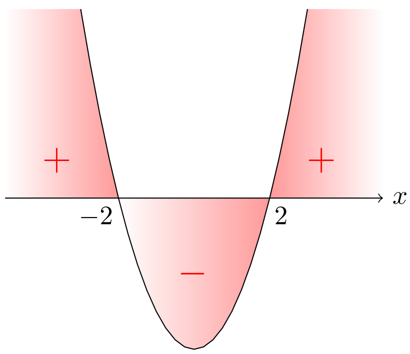
Além disso, como o coeficiente de x^2 na expressão algébrica que define f é igual a 1, que é um número real positivo, temos que o gráfico de f é uma parábola aberta para cima. A figura a seguir o esboça:



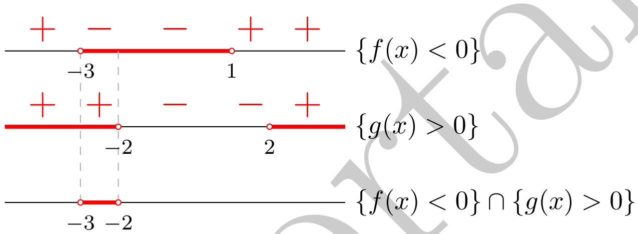
De modo semelhante ao que foi feito para a função $f(x)$, temos

$$g(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Assim, $g(x)$ possui raízes 2 e -2 e seu gráfico também é uma parábola aberta para cima:



No próximo diagrama podemos ver, em destaque, os conjuntos-verdade das inequações $x^2 + 2x - 3 < 0$ e $x^2 - 4 > 0$. A interseção dos dois é o conjunto-verdade do sistema.



Desse modo, obtemos que o conjunto-verdade do sistema

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

é igual a

$$V = (-3, -2).$$

$\square$

Exemplo 3. *Encontre o conjunto-verdade do seguinte sistema de inequações em* $\mathbb{R}$*:*

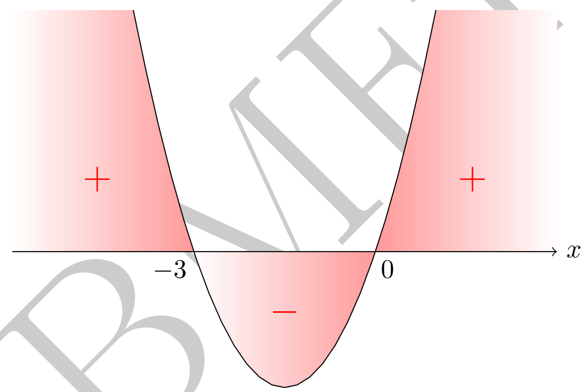
$$\begin{cases} x^2 + 3x \leq 0 \\ x^2 - x \leq 0 \end{cases}.$$

Solução. Repetindo o procedimento feito nos exemplos anteriores, vamos analisar, separadamente, os sinais das funções quadráticas $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = x^2 - x$.

Primeiramente, uma vez que

$$x^2 + 3x = 0 \Longleftrightarrow x(x+3) = 0,$$

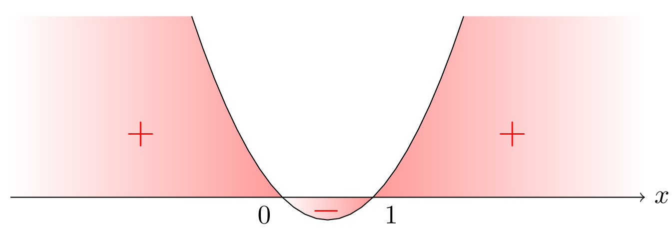
$f(x)$ tem raízes iguais a 0 e -3. Além disso, o coeficiente de x^2 em $x^2 + 3x$ é igual a 1, que é positivo, de sorte que o gráfico de f é uma parábola aberta para cima. Veja um esboço do gráfico de f na figura abaixo:



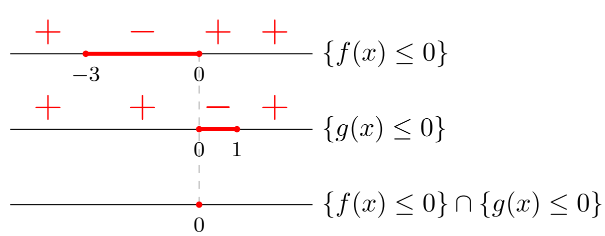
Quanto à função quadrática g, temos que

$$x^2 - x = x(x-1).$$

Assim, g possui raízes iguais a 0 e 1 e, uma vez que o coeficiente de x^2 na expressão algébrica que define g é 1, que é um número positivo, o gráfico de g é uma parábola aberta para cima. A figura a seguir, esboçamos tal gráfico:



No diagrama abaixo, vemos em destaque, os conjuntos-verdades das inequações $x^2 + 3x \leq 0$ e $x^2 - x \leq 0$, além do conjunto-verdade do sistema:



Desse modo, o conjunto-verdade do sistema

$$\begin{cases} x^2 + 3x \leq 0 \\ x^2 - x \leq 0 \end{cases}$$

é

$$V = \{0\}.$$

$\square$

Exemplo 4. *Resolva o seguinte sistema em $\mathbb{R}$:*

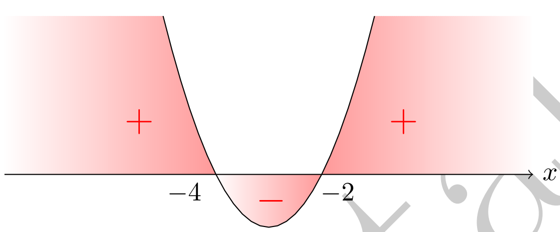
$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8 \leq 0 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases}.$$

Solução. Mais uma vez, começaremos analisando os sinais das funções quadráticas $f(x) = x^2 + 6x + 8$ e $g(x) = x^2 - 2$.

Fatorando a expressão de $f(x)$ para encontrar suas raízes, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 8 \\ &= x^2 + 2x + 4x + 8 \\ &= x(x+2) + 4(x+2) \\ &= (x+2)(x+4) \end{aligned}$$

Assim, $f(x)$ possui raízes iguais a -2 e -4. Como o coeficiente de x^2 de $f(x)$ é 1, o gráfico de f é uma parábola que possui abertura voltada para cima, logo, tem a seguinte forma:



Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 2 \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}), \end{aligned}$$

de onde concluímos que $g(x)$ possui raízes iguais a $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Além disso, o gráfico de g também é uma parábola aberta para cima (veja a próxima figura).

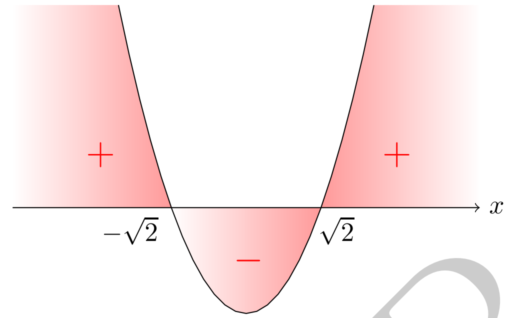
No diagrama a seguir, obtemos o conjunto-verdade do sistema a partir dos conjuntos-verdade de $f(x) \leq 0$ e de $g(x) > 0$. Desse modo, obtemos que o conjunto-verdade do sistema

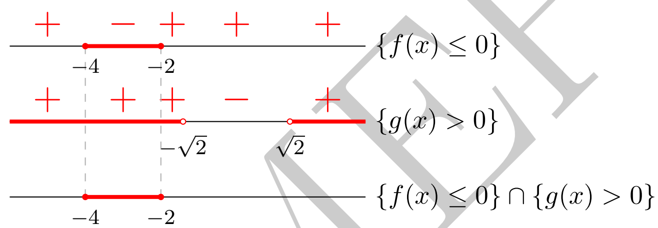
$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8 < 0 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases}$$

é igual a

$$V = [-4, -2].$$

$\square$





Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

Assim como nos materiais sobre inequações produto e quociente do segundo grau e sobre inequações mistas, em geral aqui também optamos por não utilizar fórmulas prontas para encontrar as raízes das funções quadráticas que foram tratadas. Recomendamos que o professor proponha aos alunos que tentem encontrar as raízes utilizando outros métodos.

O professor também deve chamar a atenção dos alunos para o fato de que as extremidades dos intervalos que compõem o conjunto-verdade devem ser excluídas deste conjunto quando a inequação for estrita.

As leituras complementares a seguir contêm material adicional sobre inequações envolvendo funções quadráticas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.