Material Teórico - Módulo Métodos de Contagem e Probabilidade

Alguns Problemas de Contagem - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de Abril de 2024

Portal da Matemática
OBMEP

1 Contagem recursiva

A ideia geral por trás de uma *contagem recursiva* ou *por recursão* é a seguinte: desejamos contar o número de elementos de um conjunto A_n, formado pro meio de alguma regra específica em função do natural n. Começamos denotando esse número de elementos por a_n; em seguida, utilizamos a regra de formação do conjunto A_n para obter uma **relação de recorrência** para a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$, isto é, uma relação do tipo

$$a_n = F(a_1, \ldots, a_{n-1}, n), \tag{1}$$

para alguma função de n variáveis F; finalmente, a partir dessa relação de recorrência, usamos argumentos de Álgebra ou Cálculo para explicitar a_n em função de n.

Para ilustrar a implementação das duas etapas acima (obter uma recorrência da forma (1) e, em seguida, encontrar a_n em função de n), colecionamos, a seguir, alguns exemplos simples de contagem recursiva, a começar pela contagem recursiva do número de subconjuntos de um conjunto finito.

Exemplo 1. *Calcule o número de subconjuntos do conjunto* $A = \{a, b, c, d, e\}$, *admitindo sabido que o conjunto* $A' = \{a, b, c, d\}$ *possui exatamente* 16 *subconjuntos.*

Solução. Se B for um subconjunto de A, então há duas possibilidades para B: ou $e \in B$ ou $e \notin B$. Analisemos esses dois casos separadamente:

i. $e \notin B$: nesse caso, B também é um subconjunto de A'. Como estamos supondo conhecido que A' tem 16 subconjuntos, haverá 16 possibilidades para B.

ii. $e \in B$: nesse caso, $B \setminus \{e\}$ é um subconjunto de A'. (Por exemplo, se $B = \{a, b, d, e\}$, então $B \setminus \{e\} = \{a, b, d\}$ que é um subconjunto de A'. Então (novamente assumindo que A' tem 16 subconjuntos), haverá 16 possibilidades para $B \setminus \{e\}$, logo, também 16 possibilidades para B. (Por exemplo, uma das possibilidades para $B \setminus \{e\}$ é que seja $B \setminus \{e\} = \{a, b, c\}$; nesse caso, $B = \{a, b, c, e\}$.)

Dessa forma, o total de possibilidades para B é $16 + 16 = 32 = 2^5$. $\square$

Veja que o fundamental, no argumento acima é que calculamos o número de subconjuntos de $A = \{a, b, c, d, e\}$ *recorrendo* ao número de subconjuntos de $A' = \{a, b, c, d\}$ (e supondo que já conhecíamos tal número de subconjuntos). O próximo exemplo lida com o caso geral do exemplo anterior.

Exemplo 2. *Se A é um conjunto com n elementos, prove que A tem exatamente 2^n subconjuntos.*

Prova. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja a_m o número de subconjuntos de um conjunto com m elementos.

Se o conjunto A do enunciado tiver 1 elemento, digamos, $A = \{x\}$, então A terá exatamente dois subconjuntos: $\emptyset$ e $\{x\}$; assim, $a_1 = 2$.

Suponha, agora, que $n > 1$ e A tem n elementos, logo, a_n subconjuntos. Fixado um elemento $x \in A$, há dois tipos de subconjuntos de A: os que contém x e os que não contém x (aqui, o elemento x faz o papel de e, no exemplo anterior). Analisemos essas duas possibilidades separadamente:

i. $x \notin B$: nesse caso, $B \subset A$ e $x \notin B$ garantem que, de fato, $B \subset A'$, em que $A' = A \setminus \{x\}$. Como o conjunto A' tem $n - 1$ elementos, ele tem exatamente a_{n-1} subconjuntos. Como B pode ser qualquer um deles, há a_{n-1} possibilidades para B.

ii. $x \in B$: nesse caso, $B \subset A$ e $x \in B$ garantem que $B \setminus \{x\} \subset A \setminus \{x\} = A'$. Como o conjunto A' tem $n - 1$ elementos, ele tem exatamente a_{n-1} subconjuntos; portanto, há a_{n-1} possibilidades para $B \setminus \{x\}$, logo, a_{n-1} possibilidades para B (basta colocar o x de volta em $B \setminus \{x\}$).

Contabilizando os dois tipos acima de subconjuntos de A, concluímos que

$$a_n = a_{n-1}a_{n-1} = 2a_{n-1},$$

para todo $n > 1$. Isso garante que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma progressão geométrica (PG) de termo inicial $a_1 = 2$ e razão 2. Portanto, a fórmula para o termo geral de uma PG dá

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

□

Comparando a solução do exemplo anterior com aquela do exemplo 1, percebemos que a diferença fundamental é que, no primeiro exemplo, já sabíamos que A' tinha 16 subconjuntos, ao passo que, no exemplo anterior, calculamos o número de subconjuntos de A *em função* do número de subconjuntos de A'. Isso fez com que, em vez de deduzirmos imediatamente que A tem $16 + 16 = 32$ subconjuntos (como no primeiro exemplo), concluímos apenas que A tem o dobro do número de subconjuntos de A' ($a_n = 2a_{n-1}$). A partir desse ponto, a Combinatória acaba, e a Álgebra entra em ação para deduzir que $a_n = 2^n$.

Tanto quanto saibamos, a primeira situação-problema que demando uma estratégia recursiva para ser resolvida foi o célebre **problema de Fibonacci**, assim nomeado em relação ao matemático italiano do século XII Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci.

Exemplo 3 (problema de Fibonacci). *Suponha que um casal de coelhos está apto a gerar descendentes quando completa dois meses de vida, gerando, então, um novo casal de coelhos a cada mês. Se, em um ambiente isolado, tivermos inicialmente um casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais teremos após* 12 *meses, admitindo que não terá havido mortes de coelhos?*

Solução. Denotemos por F_n a quantidade de casais de coelhos após n meses.

Uma vez que o primeiro casal de descendentes só nasce no início do terceiro mês, temos $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

Para calcular F_3 (a quantidade de casais de coelhos após 3 meses), veja que ele consiste de F_2 (pois o casal de coelhos contabilizado após dois meses continuarão existindo), somado a $F_1 = 1$ (pois o casal inicial gerou um novo casal após dois meses). Assim, $F_3 = F_2 + F_1 = 2$.

Da mesma forma, para calcular F_4 (a quantidade de casais de coelhos após 4 meses), veja que ele consiste de F_3 (pois os casais de coelhos contabilizados após três meses continuarão existindo), somado a $F_2 = 1$ (pois o casal que existia após dois meses gerou um novo casal após mais dois meses). Assim, $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$.

Mais geralmente, consideremos, agora, a quantidade F_n de casais existentes após n meses, com $n \geq 3$. Há duas possibilidades para um tal casal: ou ele já existia após $n-1$ meses, ou ele nasceu no mês n.

O primeiro caso corresponde, por definição, a um total de F_{n-1} casais de coelhos (que continuarão existindo após n meses).

No segundo caso, o casal de coelhos nascido no mês n descende de um dos casais que já existiam após $n-2$ meses; reciprocamente, cada um dos casais que já existiam após $n-2$ meses gera um casal de descendentes que será contabilizado após o mês n. Assim, o número de casais de coelhos nascidos no mês n coincide com o número de casais de coelhos que existiam após $n-2$ meses, ou seja, é igual a F_{n-2}.

Portanto, a quantidade de casais de coelhos após n meses é igual à quantidade de casais de coelhos após $n-1$ meses, somada à quantidade de casais de coelhos após $n-2$ meses. Em símbolos,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

para todo $n \geq 3$.

Veja que o enunciado pede para calcularmos F_{12}, o que pode ser feito, agora, sem dificuldade:

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5;$$

$$F_6 = F_5 + F_3 = 5 + 3 = 8;$$

$$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13;$$

$$F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21;$$

$$F_9 = F_8 + F_7 = 21 + 13 = 34;$$

$$F_{10} = F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55;$$

$$F_{11} = F_{10} + F_9 = 55 + 34 = 89;$$

$$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 89 + 55 = 144.$$

□

Nas notações do exemplo anterior, a sequência $(F_n)_{n\geq 1}$ é conhecida como a **sequência de Fibonacci** e F_n é o ***n*-ésimo número de Fibonacci**.

O exemplo anterior também deixa clara a importância de, partindo de uma recorrência geral (1), dispormos de técnicas para calcular a_n em função de n. Por exemplo, imagine que quiséssemos calcular (ou pelo menos *estimar*), no exemplo anterior, a quantidade de casais de coelhos após 100 meses. O trabalho não seria mais tão simples ...

Nesse sentido, a título de curiosidade, observamos que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \qquad (2)$$

para todo $n \geq 1$. A partir daí, observando que $\sqrt{5} \cong 2,24$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,62$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0,62$, podemos estimar

$$F_{100} \cong \frac{1}{2,24}\,(1,6)^{100} > \frac{1}{2,56}\,(2,56)^{50} = (2,56)^{49},$$

que é um número imenso!

No que segue, veremos mais alguns exemplos interessantes, o primeiro dos quais já conhecido por outros métodos.

Exemplo 4. *Calcule, em função de n, o número de diagonais de um polígono convexo de $n \geq 3$ lados.*

Prova. Denote por a_n o número de diagonais de um polígono convexo de n lados, e observe que $a_3 = 0$ (uma vez que um triângulo tem 0 diagonais).

Para obter uma recorrência envolvendo a_n, comparemos as quantidades de diagonais de polígonos convexos de k e $k+1$ lados, para um certo inteiro $k \geq 3$.

Para tanto, seja $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ um polígono convexo de $k+1$ lados (acompanhe na figura 1).

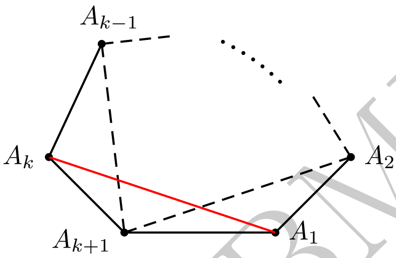

Figura 1: contando recursivamente as diagonais de um polígono convexo de $k+1$ lados.

A diagonal A_1A_k o divide em dois polígonos: o triângulo $A_1A_kA_{k+1}$ e o polígono de k lados $A_1A_2 \ldots A_k$. Observe, agora, que as diagonais de $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ são de um, dentre três tipos possíveis:

(i) A_1A_k;

(ii) diagonais de $A_1A_2 \ldots A_k$;

(iii) as diagonais A_iA_{k+1}, para $2 \leq i \leq k-1$.

Como há a_k diagonais do tipo (ii) e $k-2$ diagonais do tipo (iii), concluímos que $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ tem exatamente $1 + a_k + (k-2)$ diagonais. Assim, obivemos a recorrência

$$a_{k+1} = a_k + (k-1),$$

válida para todo $k \leq 3$.

Para obter a_n em função de n, escreva a recorrência acima para $k = 3, 4, \ldots, n-1, n$, obtendo

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + 2 \\ a_5 &= a_4 + 3 \\ &\cdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + (n-3) \\ a_n &= a_{n-1} + (n-2). \end{aligned}$$

Somando as igualdades acima membro a membro e recordando que $a_3 = 0$, ficamos com

$$\begin{aligned} &(a_4 + a_5 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = \\ &= (a_4 + a_5 + \ldots + a_{n-1}) + (2 + 3 + \ldots + (n-3) + (n-2)). \end{aligned}$$

Por fim, cancelando a parcela $a_4 + a_5 + \ldots + a_{n-1}$ em ambos os membros da igualdade acima e aplicando a fórmula para a soma dos termos de uma progressão aritmética, chegamos finalmente a

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + 3 + \ldots + (n-3) + (n-2) \\ &= \frac{[2 + (n-2)](n-3)}{2} \\ &= \frac{n(n-3)}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Os dois últimos exemplos são um tanto mais desafiadores.

Exemplo 5 (Olimpíada Soviética). *Em um plano, são dadas n retas em* posição geral*, isto é, tais que não há duas paralelas nem três passando por um mesmo ponto. Calcule o número de regiões em que o plano fica dividido por tais retas.*

Solução. Suponha que, ao traçarmos no plano m retas em posição geral, o mesmo fica dividido em a_m regiões.

Partindo de k retas em posição geral (e, portanto, de a_k regiões), tracemos uma reta a mais, digamos r, de tal modo que as $k+1$ retas resultantes também estejam em posição geral.

Como r intersecta as k retas anteriores em k pontos distintos, concluímos que r fica dividida em $k+1$ intervalos por esses k pontos.

Cada um desses $k+1$ intervalos em que r fica dividida corresponde a exatamente uma região que r atravessa, dentre as a_k regiões que já tínhamos. Ao atravessar uma tal região, r a extingue, dividindo-a em duas novas regiões. Portanto, r extingue $k+1$ regiões e gera $2(k+1)$ regiões.

Assim, descontando das a_k regiões iniciais as regiões extintas e, em seguida, adicionando as regiões geradas, obtemos a recorrência

$$a_{k+1} = a_k - (k+1) + 2(k+1) = a_k + (k+1).$$

Por fim, para obter a_n em função de n, note primeiro que $a_1 = 2$ (uma reta divide o plano em duas regiões); em seguida, argumente como no exemplo anterior, para obter

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 3 \\ &\dots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + (n-1) \\ a_n &= a_{n-1} + n, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} &(a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = \\ &= a_1 + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + (2 + 3 + \ldots + n) \end{aligned}$$

e, daí,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (2 + 3 + \ldots + n) \\ &= 2 + (2 + 3 + \ldots + n) \\ &= 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 6. *O **jogo da Torre de Hanói** consiste de três hastes iguais de madeira, coladas verticalmente ao tampo de uma mesa, juntamente com uma pilha de n discos de tamanhos dois a dois distintos, todos tendo um buraco no centro, através do qual eles podem deslizar ao longo das hastes. A figura 2 mostra a configuração inicial do jogo para $n = 5$, com todos os discos empilhados na haste mais à esquerda, do menor disco (no topo) para o maior disco (na base) da pilha. O objetivo do jogo é mover todos os discos para a haste mais à direita, possivelmente com a ajuda da haste central e obedecendo a seguinte regra: em nenhum momento, um disco pode ser colocado acima de um disco menor, em qualquer haste. Para n geral, seja a_n o menor número de movimentos necessários para terminar o jogo. Mostre que:*

(a) $a_{k+1} = 2a_k + 1$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(b) $a_n = 2^n - 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

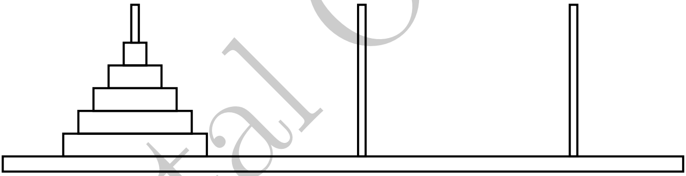

Figura 2: o jogo da Torre de Hanói.

Prova. Para o item (a), assuma que temos $k+1$ discos empilhados na haste mais à esquerda. Obviamente, precisamos de ao menos a_k movimentos para empilhar os k primeiros discos na haste central; um movimento extra desloca o disco maior (que tinha ficado na haste mais à esquerda) para a haste mais à direita; finalmente, ao menos a_k movimentos adicionais são necessários para mover os k discos da haste central para a haste mais à direita. Isso totaliza $a_k + 1 + a_k = 2a_k + 1$ movimentos, de forma que

$$a_{k+1} = 2a_k + 1.$$

Para o item (b), note que, por (a),

$$a_{k+1} + 1 = 2a_k + 2 = 2(a_k + 1).$$

Portanto, a sequência $(b_n)_{n\geq 1}$ definida por $b_n = a_n + 1$ é uma PG de razão 2, de forma que

$$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1}.$$

Por fim, substituindo $b_n = a_n + 1$ e levando em conta que $a_1 = 1$, obtemos

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1},$$

logo, $a_n = 2^n - 1$. $\square$

Comentário sobre combinações simples via recursão

Dicas para o Professor

Esse material foi parcialmente baseado na seção 1.3 da referência [2]. Lá, bem como na referência [4], o leitor pode encontrar cursos completos de Combinatória básica e, em particular, muitos outros exemplos interessantes de contagens recursivas.

A fim de tornar este material autocontido, ilustramos a estratégia de contagem recursiva com exemplos que ou não exigiram calcular a_n em função de n (a partir de uma relação de recorrência como 1) ou foram tais que a tarefa de calcular a_n em função de n necessitou somente de argumentos algébricos muito simples.

Isso nem sempre é assim; por exemplo, as referências [2] e [4] dedicam um espaço considerável ao estudo de técnicas específicas para obter a_n a partir de n, partindo de uma relação de recorrência como (1). A esse respeito, veja também o capítulo 4 de [1] e o capítulo 9 de [3]. Em particular, (2) é deduzida (por métodos distintos) tanto no capítulo 4 de [1] quanto no capítulo 3 de [2].

O conteúdo aqui reunido pode ser apresentado em duas sessões de 50 minutos cada.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, segunda edição. Rio de Janeiro, SBM Editora, 2013.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM Editora, 2024.

3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*, segunda edição. Rio de Janeiro, SBM Editora, 2016.

4. J. Plínio de O. Santos et al. *Introdução à Análise Combinatória*, quarta edição. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.