Material Teórico - Módulo Sistemas de Numeração e Paridade

Sistemas de Numeração - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

29 de novembro de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Sistema de Numeração Decimal

Ao longo da história, sistemas de numeração foram desenvolvidos por povos de diferentes culturas para contar e registrar quantidades. Um ponto em comum em todos esses sistemas de numeração é o agrupamento de unidades. No **sistema de numeração decimal**, os agrupamentos são feitos em grupos de potências de 10 e os **algarismos** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 representam a quantidade de grupos em cada posição. Por exemplo, o número 2.986 é utilizado para representar 2 grupos de 1.000 (2 milhares), 9 grupos de 100 (9 centenas), 8 grupos de 10 (8 dezenas) e 6 grupos de 1 (6 unidades). Assim,

$$2.986 = 2 \times 1.000 + 9 \times 100 + 8 \times 10 + 6 \times 1.$$

Veja que cada algarismo que compõe o número 2.986 representa uma quantidade: o 2 representa $2 \times 1.000 = 2.000$, o 9 representa $9 \times 100 = 900$, o 8 representa $8 \times 10 = 80$ e o 6 representa $6 \times 1 = 6$. Se mudamos as posições do 9 e do 8, por exemplo, obtemos o número 2.896, cujos algarimos representam as seguintes quantidades: o 2 representa $2 \times 1.000 = 2.000$, o 8 representa $8 \times 100 = 800$, o 9 representa $9 \times 10 = 90$ e 0 6 continua representando $6 \times 1 = 6$, ou seja,

$$2.896 = 2 \times 1.000 + 8 \times 100 + 9 \times 10 + 6 \times 1.$$

Utilizamos o sistema de numeração decimal para realizar operações aritméticas básicas com os números naturais, como veremos a seguir.

Adição

Para somar os números 32 e 47, inicialmente note que 32 é formado por 3 dezenas e 2 unidades, e 47 é formado por 4 dezenas e 7 unidades. Daí, basta somar os grupos correspondentes nos dois números: $2 + 7 = 9$ unidades e $3 + 4 = 7$ dezenas. Assim,

$$\begin{array}{r} 3\ 2 \\ +\ 4\ 7 \\ \hline 7\ 9 \end{array}$$

Vamos repetir o raciocínio para somar os números 26 e 57. Obtemos $6 + 7 = 13$ unidades e $2 + 5 = 7$ dezenas. Mas 13 unidades correspondem a 1 dezena e 3 unidades. Logo, obtemos

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 2\,6 \\ +\;5\,7 \\ \hline 8\,3 \end{array}$$

Subtração

Para subtrair um número natural de outro, procedemos de modo similar ao que foi feito para a adição. Por exemplo, o resultado de $738 - 215$ é o número formado por $8 - 5 = 3$ unidades, $3 - 1 = 2$ dezenas e $7 - 2 = 5$ centenas. Desse modo,

$$\begin{array}{r} 7\,3\,8 \\ -\;2\,1\,5 \\ \hline 5\,2\,3 \end{array}$$

Para subtrair 328 de 573, não podemos subtrair 8 unidades de 3. A saída é transformar uma das 7 dezenas de 573 em 10 unidades. Juntando essas 10 unidades com as 3 que já fazem parte do número, obtemos um total de 13 unidades. Assim, o número 573 corresponde a 5 centenas, 6 dezenas e 13 unidades. Agora, realizando a subtração, obtemos: $13-8 = 5$ unidades, $6 - 2 = 4$ dezenas e $5 - 3 = 2$ centenas. Portanto,

$$\begin{array}{r} 5\,7\,3 \\ -\;3\,2\,8 \\ \hline 2\,4\,5 \end{array}$$

Multiplicação

Para efetuar a multiplicação 28×3, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$\begin{aligned} 28 \times 3 &= (20 + 8) \times 3 \\ &= 20 \times 3 + 8 \times 3 \\ &= 60 + 24 \\ &= 84. \end{aligned}$$

Na prática, utilizamos o dispositivo abaixo para calcular o produto 28×3.

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ & 2 & 8 \\ \times & & 3 \\ \hline & 8 & 4 \end{array}$$

Para multiplicar 23 por 45, procedemos de modo análogo.

$$\begin{aligned} 23 \times 45 &= (20 + 3) \times 45 \\ &= 20 \times 45 + 3 \times 45 \\ &= 900 + 135 \\ &= 1035. \end{aligned}$$

Na prática, utilizamos o dispositivo abaixo.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & 5 \\ & \times & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 5 \\ + & 9 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

Divisão

Para dividir 86 por 2, dividimos 8 dezenas por 2, que tem 4 dezenas como resultado, e 6 unidades por 2, que tem 3 unidades como resultado. Assim,

$$\begin{array}{r|l} 8\,6 & 2 \\ \cline{2-2} 0\,6 & 4\,3 \\ 0 & \end{array}$$

Agora, para dividir 536 por 8, procedemos do seguinte modo: uma vez que não podemos dividir 5 centenas por 8, transformamos cada uma dessas centenas em 10 dezenas. Assim, obtemos 50 dezenas, que somadas às 3 dezenas representadas pelo algarismo 3 totalizam 53 dezenas. Dividindo essas 53 dezenas por 8, encontramos 6 dezenas como quociente e 5 dezenas como resto. As 5 dezenas que sobraram correspondem a 50 unidades, que somadas às 6 unidades representadas pelo algarismo 6 totalizam 56 unidades. Finalmente, dividindo essas 56 unidades por 8 obtemos 7 unidades como quociente e resto igual a 0. Utilizando o método da chave, temos

$$\begin{array}{r|l} 5\,3\,6 & 8 \\ \cline{2-2} 5\,6 & 6\,7 \\ 0 & \end{array}$$

2 Outros sistemas de numeração

Na seção anterior, vimos que no sistema de numeração decimal os agrupamentos são feitos em potências de 10. Se, em vez de 10, utilizamos potências de qualquer outro inteiro positivo n para agrupar as quantidades, obtemos outro sistema de numeração. Quando $n = 2$, obtemos o **sistema binário**, o qual utiliza apenas os algarismos 0 e 1. Por exemplo, o número que tem representação decimal 53 pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} 53 &= 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 \\ &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0. \end{aligned}$$

Portanto, a representação de 53 na base binária é 110101.

Um dispositivo prático para fazer a mudança de um número na base decimal para uma base qualquer n consiste em fazer divisões sucessivas por n. Voltando ao exemplo anterior, dividindo 53 por 2 obtemos

$$\begin{array}{r|l} 5\,3 & 2 \\ \cline{2-2} 1\,3 & 2\,6 \\ 1 & \end{array}$$

o que significa que podemos formar 26 grupos de 2 com as 53 unidades e sobra 1 (ou 1 grupo de 2^0). Agora, dividindo os 26 grupos de 2 por 2, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 2\,6 & 2 \\ \cline{2-2} 0\,6 & 1\,3 \\ 0 & \end{array}$$

o que significa que obtemos 13 grupos de $4 = 2^2$ e sobra 0 grupo de $2 = 2^1$. Prosseguindo com as divisões, agora de 13 por 2, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 1\,3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 6 \end{array}$$

Logo, podemos formar 6 grupos de $8 = 2^3$ e sobra 1 grupo de $4 = 2^2$. Dividindo mais uma vez por 2, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

Daí, formamos 3 grupos de $16 = 2^4$ e sobra 0 grupo de $8 = 2^3$. Dividindo uma última vez o quociente anterior por 2, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$

Ou seja, formamos 1 grupo de $32 = 2^5$ e sobra 1 grupo de $16 = 2^4$. Assim, a representação binária de 53 é formada pelo último quociente seguido dos restos, do último até o primeiro, respeitando essa ordem: 110101. Escrevemos $(53)_{10} = (110101)_2$ para representar a mudança do número 53 da base decimal para a base binária.

Exemplo 1. *Utilizando uma balança de dois pratos, quantos pesos diferentes podem ser obtidos utilizando pesinhos de* 1 kg, 2 kg, 4 kg *e* 8 kg *(um de cada)?*

Solução. Com o auxílio da tabela abaixo, podemos ver que é possível obter todos os pesos inteiros de 1 kg até 15 kg, combinando os quatro pesos dados.

	1 kg	2 kg	4 kg	8 kg
1 kg	X			
2 kg		X		
3 kg	X	X		
4 kg			X	
5 kg	X		X	
6 kg		X	X	
7 kg	X	X	X	
8 kg				X
9 kg	X			X
10 kg		X		X
11 kg	X	X		X
12 kg			X	X
13 kg	X		X	X
14 kg		X	X	X
15 kg	X	X	X	X

Por exemplo, para pesar 11 kg, somamos os pesos de 1 kg, 2 kg e 8 kg. Logo, podem ser obtidos 15 pesos diferentes utilizando pesinhos de 1 kg, 2 kg, 4 kg e 8 kg (um de cada). □

Observação 2. *Observando a tebela construída para auxiliar a solução do exemplo 1, é fácil notar que utilizamos os grupos de* 2^0, 2^1, 2^2 *e* 2^3 *para escrever todos as representações binárias dos números de 1 até 15. De fato, observe a nova tabela construída abaixo.*

	2^0	2^1	2^2	2^3	Rep. Binária
1	X				$(1)_2$
2		X			$(10)_2$
3	X	X			$(11)_2$
4			X		$(100)_2$
5	X		X		$(101)_2$
6		X	X		$(110)_2$
7	X	X	X		$(111)_2$
8				X	$(1000)_2$
9	X			X	$(1001)_2$
10		X		X	$(1010)_2$
11	X	X		X	$(1011)_2$
12			X	X	$(1100)_2$
13	X		X	X	$(1101)_2$
14		X	X	X	$(1110)_2$
15	X	X	X	X	$(1111)_2$

Mais geralmente, para escrever todos os inteiros positivos até $2^n - 1$*, são necessários os grupos* $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$.

Exemplo 3. *Em cada um dos itens abaixo, transforme o número para a base indicada.*

(a) $(237)_{10}$ *para a base 5.*

(b) $(347)_8$ *para a base 10.*

(c) $(21302)_4$ *para a base 7.*

Solução.

(a) Para trasnformar $(237)_{10}$ para a base 5, fazemos sucessivas divisões por 5. Iniciamos dividindo 237 por 5.

$$\begin{array}{r|l} 2\,3\,7 & 5 \\ \cline{2-2} 3\,7 & 4\,7 \\ 2 & \end{array}$$

em seguida, dividimos o quociente 47 por 5.

$$\begin{array}{r|l} 4\,7 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 9 \end{array}$$

Finalmente, dividimos o novo quociente, que é igual a 9, por 5.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array}$$

. Desse modo, de modo análogo ao que fizemos acima para a base 2, obtemos $(237)_{10} = (1422)_5$. Observe que 1422 é formado pelo último quociente e pelos restos das divisões, da última até a primeira.

(b) Para escrever $(347)_8$ na base 10, basta calcular o valor da expressão numérica $3 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 7 \times 8^0$. Com efeito, temos

$$3 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 3 \times 64 + 4 \times 8 + 7 = (231)_{10}.$$

(c) Para escrever $(21302)_4$ na base 7, primeiro transformaremos $(21302)_4$ para a base 10 e, em seguida, transformaremos a representação obtida para a base 7. Mas

$$\begin{aligned}(21302)_4 &= 2 \times 4^4 + 1 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 2 \times 4^0 \\ &= 2 \times 256 + 1 \times 64 + 3 \times 16 + 2 \\ &= 512 + 64 + 48 + 2 \\ &= (626)_{10}.\end{aligned}$$

Agora, para escrever $(626)_{10}$ na base 7, fazemos divisões sucessivas por 7.

$$\begin{array}{r|l} 6\,2\,6 & 7 \\ \cline{2-2} 6\,6 & 8\,9 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8\,9 & 7 \\ \cline{2-2} 1\,9 & 1\,2 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,2 & 7 \\ \cline{2-2} 5 & 1 \end{array}$$

Assim, obtemos

$$(21302)_4 = (626)_{10} = (1553)_7.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. Explique com todos os detalhes o dispositivo prático utilizado para escrever um número dado na base decimal em uma base qualquer (divisões sucessivas). É comum que os alunos sintam dificuldade para entender por que a representação é formada pelo último quociente seguido dos restos das divisões na ordem contrária (do último para o primeiro).