Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Leis do Limite - Parte 2

Teorema do Sanduíche

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

08 de Outubro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Neste material, resolveremos problemas variados relacionados ao teorema do confronto (também conhecido como teorema do sanduíche).

1 Exemplos

Vamos lembrar do seguinte fato: *cada número real x se expressa, de forma única, como $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, em que $\lfloor x \rfloor$ é um número inteiro, chamado a* parte inteira de x *e $\{x\}$ é um número real do intervalo $[0,1)$, denominado a* parte fracionária de x. *Em particular, vale $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, de sorte que*

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Exemplo 1. *Dados os números reais positivos a e b, calcule*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor.$$

Solução. Como $\frac{b}{x} - 1 < \lfloor \frac{b}{x} \rfloor \leq \frac{b}{x}$, podemos escrever, para $x > 0$,

$$\frac{x}{a}(\frac{b}{x} - 1) < \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor \leq \frac{x}{a} \frac{b}{x}$$

ou, ainda,

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{a}. \tag{1}$$

Sendo $\lim_{x \to 0} \left(\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \right) = \frac{b}{a} = \lim_{x \to 0} \frac{b}{a}$, segue-se do teorema do confronto que $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor$ existe, com

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}.$$

A demonstração da relação $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor = \frac{b}{a}$ é similar, de modo que $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor$ existe e vale $\frac{b}{a}$. □

No próximo exemplo, calcularemos, com o auxílio do teorema do confronto, o limite no infinito de uma função real $a = a(n)$, definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Em verdade, uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ chama-se uma *sequência de números reais*, e costumamos indicar o valor $a(n)$ por a_n. Desse modo, podemos denotar a sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ simplesmente como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entre os exemplos familiares de sequências estão as progressões aritméticas e as progressões geométricas.

Exemplo 2. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão aritmética crescente, de razão r. Se $p(n)$ é o número de termos a_m que são menores que ou iguais a n, mostre que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{n} = \frac{1}{r}.$$

Solução. Como a progressão é crescente, temos $r > 0$. Por hipótese, vale $a_n = a_1 + (n-1)r$, para cada n natural. Pela definição do índice $p(n)$, temos $a_{p(n)} \leq n < a_{p(n)+1}$, de sorte que

$$a_1 + (p(n) - 1)r \leq n < a_1 + p(n)r.$$

Multiplicando as desigualdades acima por $\frac{1}{nr}$ e rearranjando seus termos, obtemos

$$\frac{1}{r} - \frac{a_1}{r}\frac{1}{n} < \frac{p(n)}{n} \leq \frac{1}{r} + \left(1 - \frac{a_1}{r}\right)\frac{1}{n}, \tag{2}$$

para qualquer número natural $n \geq 1$.

Levando em conta a igualdade $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, as regras aritméticas para limites nos dão

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{a_1}{r}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{r} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{r} - \left(1 - \frac{a_1}{r}\right)\frac{1}{n}\right]. \tag{3}$$

Por (2) e (3), o teorema do confronto implica o resultado desejado, isto é, $\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{n} = \frac{1}{r}$. □

Observação 3. *Nas hipóteses do exemplo anterior, se cada a_n é um número natural, podemos interpretar a relação $\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{n} = \frac{1}{r}$ da seguinte forma: escolhendo aleatoriamente um número natural de 1 até n, a probabilidade desse número ser um termo a_m da progressão aritmética é,* assintoticamente, *igual a $1/r$.*

Antes do próximo exemplo, devemos enunciar um resultado muito útil sobre limites. No que segue, se $x = x(u)$ for uma função da variável u, escreveremos "$x \to a, x \neq a$, quando $u \to u_0$" se valer $\lim_{u \to u_0} x(u) = a$, com $x(u) \neq a$, para todo u (pertencente ao domínio da função $x = x(u)$) suficientemente próximo de u_0 e diferente de u_0. Por exemplo, quando $u \to 0$, temos que $x = u^2 \to 0$ (com $x \neq 0$, uma vez que $u \neq 0$); da mesma forma, quando $u \to \pi$, temos que $x = \cos u \to -1$ (com $x \neq -1$ quando u estiver suficientemente próximo a π).

Teorema 4 (Mudança de Variável no Limite). *Suponha que exista $L = \lim_{x \to a} f(x)$, e seja $x = x(u)$ uma função da variável u, tal que, $x \to a$ quando $u \to u_0$. Se, para u suficientemente próximo a u_0, tivermos sempre $x \neq a$, então, também vale que $\lim_{u \to u_0} f(x(u)) = L$.*

Prova. A demonstração segue da definição de limite. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ de tal modo que, para cada x no domínio da função f, vale

$$0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{4}$$

Por outro lado, nossas hipóteses garantem a existência de $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: se u é um ponto no domínio da função $x = x(u)$, então

$$0 < |u - u_0| < \delta \Rightarrow 0 < |x(u) - a| < \eta. \tag{5}$$

Portanto, das fórmulas (4) e (5) segue que, para u no domínio de $x = x(u)$, vale

$$0 < |u - u_0| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x(u)) - L| < \varepsilon.$$

Isso estabelece a igualdade desejada, $\lim_{u \to u_0} f(x(u)) = L$. □

Observação 5. *Com adaptações naturais, o teorema acima continua válido para limites laterais, limites no infinito ou, ainda, se $L = \pm\infty$. Sugerimos que você pause a leitura por um momento e convença-se da validade dessa afirmação.*

Exemplo 6. *Seja $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ uma função crescente. Se $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$, prove que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(nx)}{f(x)}=1$, para todo natural n.*

Solução. Dado um número natural m, afirmamos que

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(2^m u)}{f(u)}=1.$$

De fato, fazendo $x=2^{k-1}u$, $k\in\mathbb{N}$, temos $x\to+\infty$ se $u\to+\infty$, de modo que, pela hipótese, o teorema da mudança de variável no limite garante que $\lim_{u\to+\infty}\frac{f(2^k u)}{f(2^{k-1}u)}=1$. A afirmação segue, então, da regra do limite do produto, multiplicando as m igualdades obtidas a partir da relação anterior quando $k=1$, $k=2$, $\ldots$, $k=m$.

Agora, dado um número natural n, escolhemos $m\in\mathbb{N}$ satisfazendo $n\le 2^m$. Daí, para cada real positivo x, temos $x\le nx\le 2^m x$, de modo que $f(x)\le f(nx)\le f(2^m x)$, pois f é crescente. Portanto, vale $1\le\frac{f(nx)}{f(x)}\le\frac{f(2^m x)}{f(x)}$, para todo número real positivo x. Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^m x)}{f(x)}=1=\lim_{x\to+\infty}1$, o teorema do confronto garante a existência de $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(nx)}{f(x)}$, com $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(nx)}{f(x)}=1$. □

Exemplo 7. *Para cada número real positivo t, o gráfico da função quadrática $f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{t}}x^2+h(t)x+|\operatorname{sen} t|$ situa-se no semiplano fechado superior do plano cartesiano. Mostre que $\lim_{t\to0^+}h(t)=0$.*

Solução. Como o gráfico da função quadrática f_t intersecta o eixo das abscissas em no máximo um ponto, o discriminante $\Delta_t=[h(t)]^2-4\frac{|\operatorname{sen} t|}{\sqrt{t}}$ deve ser não positivo. Portanto, para cada $t>0$, vale

$$0\le h(t)^2\le 4\frac{|\operatorname{sen} t|}{\sqrt{t}}. \tag{6}$$

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} 4\frac{|\operatorname{sen} t|}{\sqrt{t}} &= 4\cdot \lim_{t\to 0^+}\sqrt{t}\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{t}\\ &= 4\cdot \lim_{t\to 0^+}\sqrt{t}\cdot \lim_{t\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\\ &= 4\cdot 0\cdot 1 = 0,\end{aligned}$$

as desigualdades em (6) e o teorema do confronto garantem que $\lim_{t\to 0^+} h(t)^2 = 0$. Com essa relação em mente, provaremos agora que $\lim_{t\to 0^+} h(t) = 0$, utilizando a definição de limite. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < t < \delta \Rightarrow h(t)^2 < \varepsilon^2$; mas isso implica que $0 < t < \delta \Rightarrow |h(t)| < \varepsilon$, como queríamos. $\square$

Exemplo 8.
i) Se $a > 0$, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
ii) Dados $k \in \mathbb{N}$ e números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_k$, calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}$.

Solução. i) Vamos começar supondo $a > 1$. Se $0 < y < x$, a fatoração $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ assegura que $x^n - y^n > (x-y)ny^{n-1}$. Fazendo $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = 1$ na desigualdade anterior, vem que

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, o teorema do confronto implica que $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{a} - 1) = 0$, ou seja, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Agora, se $a < 1$ [1], então, uma vez que $\frac{1}{a} > 1$, o caso já tratado dá $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. A partir daí, a igualdade $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ segue da regra do quociente.

Quanto ao item ii), se l é o maior dos valores $a_1, a_2, \ldots, a_k$, mostremos que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = l$. De fato, para cada natural n, temos

$$l^n \le a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n \le kl^n,$$

[1] Caro leitor, o que ocorre no caso $a = 1$?

de forma que

$$l \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{k}l,$$

para todo n. Como $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, o teorema do confronto nos assegura que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = l$, como desejado. □

Exemplo 9. *Prove que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Solução. Precisaremos da fórmula do binômio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Dessa fórmula, segue a desigualdade abaixo:

$$(a+1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}a^2, \tag{7}$$

se $a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. De fato, supondo $n \geq 2$, basta notar que as parcelas no desenvolvimento do binômio $(a+1)^n$ são todas não negativas e $\frac{n(n-1)}{2}a^2$ é, precisamente, a terceira parcela nesse desenvolvimento.

Escrevendo $\sqrt[n]{n} = a_n + 1$, para cada n natural, vemos que $a_n \geq 0$ e a igualdade $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ agora equivale a $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ora, pela desigualdade (7), temos

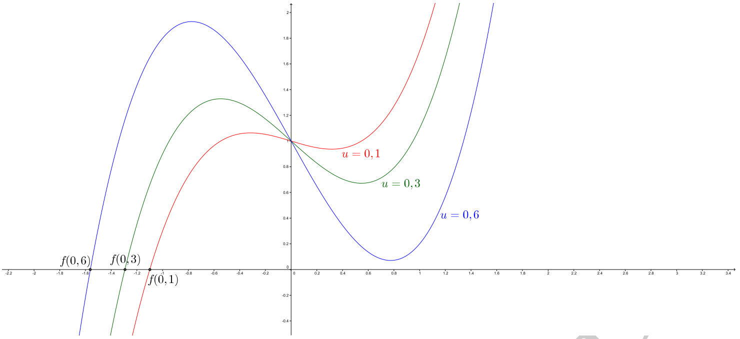
$$n = \sqrt[n]{n}^{\,n} = (a_n+1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}a_n^2,$$

de modo que $0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$, para todo n. Então, o resultado segue do teorema do confronto, pois $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0$. □

Exemplo 10. *Para cada número real u pertencente ao intervalo $\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$, a equação cúbica $x^3 - 3ux + 1 = 0$ admite uma única raiz real $f(u)$. Prove que*

$$\lim_{u\to\frac{1}{\sqrt[3]{4}}^-} f(u) = -\sqrt[3]{4}.$$

A figura abaixo mostra o gráfico da função cúbica $y_u = x^3 - 3ux + 1$ para alguns valores da variável u.



Solução. Começamos com a sequinte observação: $-2 < f(u) < -1$, para cada $u \in (0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$. De fato, pelo exemplo 10 da aula passada, a função $y_u = x^3 - 3ux + 1$ é crescente no intervalo $(-\infty, -\sqrt{u}]$ e, relativamente ao intervalo $(-\sqrt{u}, +\infty)$, y_u assume o seu valor mínimo em $x = \sqrt{u}$. Ora, $y_u(\sqrt{u}) = 1 - 2\sqrt{u}^3 > 0$, pois $u < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, de forma que $f(u)$ deve ser um ponto do intervalo $(-\infty, -\sqrt{u}]$. Por outro lado, sendo y_u crescente em $(-\infty, -\sqrt{u}]$, as relações $y_u(-2) = 6u - 7 < 0 = y_u(f(u)) < 3u = y_u(-1)$ nos dão as desigualdades $-2 < f(u) < -1$.

O restante do argumento seguirá de algumas manipulações algébricas com a identidade $f(u)^3 - 3uf(u) + 1 = 0$, juntamente com o fato de que $u \in (0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$. Primeiramente, $f(u)^3 + 4 = 3uf(u) + 3$ implica

$$f(u)^3 + 4 = 3u[f(u) + \sqrt[3]{4}] + 3(1 - u\sqrt[3]{4}).$$

Pela fatoração da soma de dois cubos, vale

$$f(u)^3 + 4 = g(u)[f(u) + \sqrt[3]{4}],$$

em que $g(u) = f(u)^2 - \sqrt[3]{4}f(u) + \sqrt[3]{16}$. Assim, a igualdade $g(u)[f(u) + \sqrt[3]{4}] = 3u[f(u) + \sqrt[3]{4}] + 3(1 - u\sqrt[3]{4})$ equivale a

$$[g(u) - 3u][f(u) + \sqrt[3]{4}] = 3(1 - u\sqrt[3]{4}). \tag{8}$$

Agora uma segunda observação: $g(u) - 3u > 1$, para todo

$u \in (0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$. Com efeito, pela primeira observação, temos

$$g(u) - 3u > 1^2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} > 1 + 1 + 2 - 3 = 1.$$

Portanto, a relação (8) dá

$$|f(u) + \sqrt[3]{4}| = \frac{3(1 - u\sqrt[3]{4})}{g(u) - 3u},$$

ou melhor,

$$0 \leq |f(u) + \sqrt[3]{4}| < 3(1 - u\sqrt[3]{4}), \tag{9}$$

para cada $u \in (0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$. Como $\lim_{u \to \frac{1}{\sqrt[3]{4}}^-} (1 - u\sqrt[3]{4}) = 0$, as desigualdades em (9) implicam $\lim_{u \to \frac{1}{\sqrt[3]{4}}^-} |f(u) + \sqrt[3]{4}| = 0$, pelo teorema do confronto. Dessa última igualdade, segue o resultado proposto. $\square$

Observação 11. *Uma solução mais direta do exemplo anterior pode ser obtida com a* fórmula de Cardano-Tartaglia *(veja a referência [4]). De fato, essa fórmula nos diz que*

$$f(u) = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - u^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - u^3}}.$$

Daí, a relação $\lim\limits_{u \to \frac{1}{\sqrt[3]{4}}^-} f(u) = -\sqrt[3]{4}$ *segue das regras aritméticas para limites.*

Dicas para o Professor

O professor pode discutir com sua turma a seguinte generalização do Exemplo (6): se $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ é uma função crescente e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$, então $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$, *para todo número real positivo* c. Pode ser útil analisar os casos $c > 1$ e $c < 1$ separadamente, indicando como o 2º caso segue do 1º e, melhor ainda, como o 1º caso pode ser tratado adaptando-se a solução apresentada no texto.

Recomendamos fortemente que as soluções dos exemplos aqui reunidos sejam apresentadas em detalhe. Além disso, antes de iniciar as resoluções dos exemplos, procure destacar as principais ideias envolvidas nos argumentos. Vale a pena incentivar os alunos a escreverem suas próprias soluções, fornecendo, sempre que conveniente, sugestões-chave aos problemas. Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.

3. W. J. Kaczor, M. T. Nowac. *Problems in Mathematical Analysis II*. AMS, 2001.

4. E. L. Lima. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.