Material Teórico - Módulo Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria

Inversão

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de Fevereiro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Na última seção da aula anterior, consideramos transformações lineares com determinante não nulo e estabelecemos algumas propriedades dessas aplicações. Finalizaremos esse módulo estudando uma condição equivalente a $\det T \neq 0$, a saber, a *invertibilidade* da aplicação linear T.

1 Transformações lineares invertíveis

Definição 1. *Uma transformação linear $T : V \to V$ será dita* invertível *se existir uma aplicação linear $T' : V \to V$ satisfazendo $T \circ T' = Id$ e $T' \circ T = Id$. Em caso afirmativo, denotaremos a aplicação T' por T^{-1} e chamaremos essa transformação linear de* inversa *de T.*

Exemplo 2. *As homotetias T_k, as rotações R_θ e as reflexões S_r são aplicações lineares invertíveis. De fato, como $S_r \circ S_r = Id$, vale $S_r^{-1} = S_r$ (a inversa de uma reflexão é ela própria). Lembrando que $T_k \circ T_l = T_{kl}$ e $T_1 = Id$, vem $T_k \circ T_{1/k} = T_{1/k} \circ T_k = Id$, ou seja, $T_k^{-1} = T_{1/k}$. O argumento para rotações é análogo, notando dessa vez que $R_{\alpha+\theta} = R_\alpha \circ R_\theta$ e $R_0 = Id$. Segue-se que $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.*

Não é difícil verificar que transformações lineares invertíveis são bijetivas (mais geralmente, veja a seção 4 do capítulo 1 da referência [1]). Reciprocamente, se $T : V \to V$ é uma aplicação linear bijetiva, a regra $T'(v) = u \Leftrightarrow v = T(u)$ define uma transformação $T' : V \to V$ que cumpre $T \circ T' = T' \circ T = Id$. Para concluir que T é invertível (e $T' = T^{-1}$) basta, então, mostrar que T' é linear. Com efeito,

$$\begin{aligned} T(T'(u+v)) &= u + v \\ &= T(T'(u)) + T(T'(v)) \\ &= T(T'(u) + T'(v)), \end{aligned}$$

para quaisquer vetores $u,v \in V$. Como T é injetiva, segue-se que $T'(u+v) = T'(u)+T'(v)$. A igualdade $T'(k\cdot u) = k\cdot T'(u)$, para $k \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, pode ser verificada de maneira similar. Essa discussão demonstra uma parte do

Teorema 3. *Seja $T : V \to V$ uma aplicação linear. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *T é invertível.*

(b) *T é bijetiva.*

(c) $\det T \neq 0$.

Prova. Já vimos que a primeira afirmação equivale à segunda. Portanto, basta estabelecer a equivalência entre as duas últimas afirmações. Ora, T é bijetiva se, e somente se, a equação $T(u) = v$ tem uma única solução, qualquer que seja o vetor $v \in V$. Em termos de coordenadas, escrevendo $[T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, vemos que T será bijetiva se, e só se, o sistema linear 2×2

$$\begin{cases} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{cases}$$

for possível e determinado, quaisquer que sejam os números reais e,f. Mas, pela regra de Crammer, essa condição equivale a $\det T = ad - bc \neq 0$. □

Observação 4. *Em várias ocasiões, encontramos na aula passada a hipótese "$T : V \to V$ é uma transformação linear com $\det T \neq 0$". Por conta do teorema acima, esse trecho pode agora ser lido como "T é uma aplicação linear invertível".*

Exemplo 5. *Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x - 2y, 3x + y)$. Como $\det T = 7 \neq 0$, T é invertível. Teremos $T^{-1}(x,y) = (z,w)$ se, e somente se, $(z - 2w, 3z + w) = (x,y)$. Resolvendo o sistema, vem $z = (x + 2y)/7$ e $w = (-3x + y)/7$, isto é, $T^{-1}(x,y) = (\frac{x+2y}{7}, \frac{-3x+y}{7})$. Por outro lado, a aplicação linear $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $S(x,y) = (x - y, -x + y)$ não é invertível, uma vez que $\det S = 0$.*

Corolário 6. *A composição de transformações lineares invertíveis ainda é uma transformação linear invertível. Mais ainda, se S e T são invertíveis, então $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$.*

Prova. Sejam $S,T : V \to V$ transformações lineares invertíveis. Como $\det(T \circ S) = \det T \cdot \det S \neq 0$, o teorema anterior nos garante que $T \circ S$ é invertível. Para finalizar, temos, pela associatividade da composição,

$$\begin{aligned}(T \circ S) \circ (S^{-1} \circ T^{-1}) &= [T \circ (S \circ S^{-1})] \circ T^{-1} \\ &= (T \circ Id) \circ T^{-1} \\ &= T \circ T^{-1} \\ &= Id,\end{aligned}$$

e a igualdade $(S^{-1} \circ T^{-1}) \circ (T \circ S) = Id$ pode ser estabelecida de forma completamente análoga. Isso demonstra a fórmula no enunciado. $\square$

Se T é uma transformação linear invertível, as igualdades $T \circ T^{-1} = Id$ e $T^{-1} \circ T = Id$ nos garantem que $[T] \cdot [T^{-1}] = I$ e $[T^{-1}] \cdot [T] = I$ (veja a primeira proposição da aula passada). Portanto, a matriz de T é invertível e $[T^{-1}] = [T]^{-1}$ (*a matriz da inversa de T é a inversa da matriz de T*). Reciprocamente, se $[T]$ é uma matriz invertível, a aplicação linear T' induzida pela matriz inversa $[T]^{-1}$ deve satisfazer $T \circ T' = Id$ e $T' \circ T = Id$, de modo que T é invertível. Acabamos de demonstrar a

Proposição 7. *Uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é invertível se, e somente se, a matriz de T é invertível. Em caso afirmativo, vale $[T^{-1}] = [T]^{-1}$.*

Retornando ao Exemplo (5), podemos obter T^{-1} calculando a inversa da matriz de T e a aplicação linear induzida. Como $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, vem $[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ -3/7 & 1/7 \end{bmatrix}$, de modo que $T^{-1}(x,y) = (\frac{x+2y}{7}, \frac{-3x+y}{7})$, como esperado.

2 A transposta de uma aplicação linear

Dada uma aplicação linear $S : V \to V$, a matriz $[S]^t$, transposta da matriz de S, induz uma aplicação linear $S^t : V \to V$.

Uma adaptação do cálculo (6), desenvolvido na 4ª seção da primeira parte desse módulo, nos mostra que S^t não depende do sistema de coordenadas considerado.

Definição 8. *Se $S : V \to V$ é uma transformação linear, a* transposta *de S é a única transformação linear $S^t : V \to V$ satisfazendo $[S^t] = [S]^t$.*

Com a definição acima, podemos dizer que uma aplicação linear S é simétrica se, e só se, $S = S^t$.

É fácil verificar que a transposição de aplicações lineares possui propriedades similares à transposição de matrizes. Por exemplo, $(T \circ S)^t = S^t \circ T^t$ e $(T^{-1})^t = (T^t)^{-1}$, se T é invertível. Em particular, a inversa de uma aplicação linear simétrica e invertível também é simétrica.

Exemplo 9. *Seja $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(x,y) = (x - y, x + y)$. A transposta de S é dada por $S^t(x,y) = (x+y, -x+y)$. De fato, S^t é induzida pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, a transposta da matriz de S.*

Exemplo 10. *Homotetias e reflexões são aplicações lineares simétricas. Para uma rotação R_θ, vale $R_\theta^t = R_\theta^{-1}$.*

Acabamos de constatar no exemplo anterior que uma aplicação ortogonal R (i.e., R é uma rotação linear ou uma reflexão linear) satisfaz $R^t = R^{-1}$. Vale a recíproca.

Proposição 11. *Uma aplicação linear invertível $R : V \to V$ é ortogonal se, e só se, $R^{-1} = R^t$.*

Prova. Falta provar que a condição $R^{-1} = R^t$ implica em R ortogonal. Faremos isso mostrando que R é uma *isometria*. De fato, identificando o número real x com a matriz 1×1 $[x]$, o quadrado do módulo de um vetor $u = (a,b)$ se escreve como $|u|^2 = a^2 + b^2 = [u]^t \cdot [u]$, em que $[u] = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Portanto, como $[R]^t \cdot [R] = I$, vem

$$\begin{aligned} |R(u)|^2 &= [R(u)]^t \cdot [R(u)] \\ &= ([R]\cdot[u])^t \cdot ([R]\cdot[u]) \\ &= [u]^t \cdot ([R]^t \cdot [R]) \cdot [u] \\ &= [u]^t \cdot [u] \\ &= |u|^2, \end{aligned}$$

ou seja, R preserva módulo: $|R(u)| = |u|$, para qualquer vetor $u \in V$. Lembrando que a distância entre os vetores $v,w \in V$ é $|v - w|$, vem $|R(v) - R(w)| = |R(v - w)| = |v - w|$, isto é, R preserva distâncias, ou melhor, R é uma isometria. Mas (confira a 2ª aula do módulo "Geometria das Transformações Lineares"), uma isometria só pode ser uma rotação, ou uma reflexão, ou uma translação ou uma reflexão com deslizamento (a composta de uma reflexão linear com uma translação). Como translações, distintas da identidade, são aplicações não-lineares, segue-se que R deve ser uma rotação ou uma reflexão, ou seja, R é ortogonal. □

Observação 12. *Das linhas da demonstração anterior, surge mais uma caracterização das transformações ortogonais:* uma aplicação linear $R : V \to V$ é ortogonal se, e só se, R preserva módulo, ou seja, $|R(u)| = |u|$, para qualquer vetor $u \in V$.

Podemos utilizar a proposição anterior para demonstrar a seguinte versão do *teorema da decomposição polar* (vide Corolário 10 da aula passada): *dada uma transformação linear T invertível, existe uma aplicação simétrica positiva S e uma transformação ortogonal R, únicas, tais que $T = S \circ R$.*

Diremos que uma aplicação linear simétrica $S : V \to V$ é *positiva* quando $\operatorname{tr} S$ e $\det S$ forem números reais positivos. (Equivalentemente, S é positiva quando os autovalores de S forem positivos. Cf. 1ª parte desse módulo.)

Por exemplo, Se T é invertível, $T \circ T^t$ é simétrico e positivo. A simetria segue de $(T \circ T^t)^t = (T^t)^t \circ T^t = T \circ T^t$. Por outro lado, $\det(T \circ T^t) = \det T \cdot \det T^t = (\det T)^2 > 0$ e, se

$[T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, vale $\mathrm{tr}\,(T \circ T^t) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$.

Pela relação (4) da aula anterior, a aplicação linear $S = k \cdot [T \circ T^t + |\det T| \cdot I]$, em que $k = \frac{1}{\sqrt{2|\det T| + \mathrm{tr}\,(T \circ T^t)}}$, satisfaz $S^2 = T \circ T^t$. O leitor poderá verificar que S é uma aplicação simétrica e positiva. Definindo $R = S^{-1} \circ T$, temos R linear e invertível, já que R é a composta de duas aplicações lineares e invertíveis. Além disso, $R^{-1} = T^{-1} \circ S = [T^t \circ (S^2)^{-1}] \circ S = T^t \circ [(S^{-1})^2 \circ S] = T^t \circ S^{-1} = (S^{-1} \circ T)^t = R^t$, de modo que R é ortogonal pela proposição anterior, e fica estabelecida a existência da decomposição.

Quanto à unicidade, suponhamos que $T = S' \circ R'$, com S' simétrica positiva e R' ortogonal. Então, um argumento nos moldes do paragráfo anterior nos conduz a $T \circ T^t = (S')^2$. Por outro lado, os cálculos realizados ao final da 2ª seção da aula passada nos dizem que a única solução da equação $X^2 = T \circ T^t$ com traço e determinante positivos é a transformação S. Logo, $S' = S$ e $R' = S^{-1} \circ T = R$, provando a unicidade da decomposição polar.

Observação 13. *Dentre as aplicações lineares simétricas invertíveis, as positivas se caracterizam pela seguinte propriedade geométrica:* uma transformação linear simétrica e invertível S é positiva se, e só se, para cada vetor não nulo u, o ângulo entre u e $S(u)$ é agudo. *Com efeito, num sistema de coordenadas em que S se expressa como $S(x,y) = (ax,by)$, o cosseno do ângulo θ entre $u = (x,y)$ e $S(u)$ satisfaz $\cos(\theta) = (ax^2 + by^2)/(|u||S(u)|)$ (confira a primeira aula desse módulo). Portanto, o ângulo entre u e $S(u)$ será agudo se, e só se, $ax^2 + by^2$ for positivo, para qualquer par $(x,y) \neq (0,0)$. Mas essa última condição aplicada aos pares $(1,1)$ e (b,a) nos dá $tr\,S = a + b > 0$ e $(\det S)(tr\,S) = ab^2 + ba^2 > 0$, ou seja, S é positivo se $u \neq 0$ e $S(u)$ sempre determinam um ângulo agudo. A recíproca é imediata.*

3 Uma caracterização geométrica das aplicações lineares invertíveis

Sabemos que uma aplicação linear invertível $T : V \to V$ transforma retas em retas: a reta $z = u + tv, t \in \mathbb{R}$, é transformada na reta $w = T(u) + tT(v), t \in \mathbb{R}$. Encerraremos esse módulo provando a recíproca desse fato: *uma bijeção $T : V \to V$, com $T(0) = 0$, transformando retas em retas é linear.* Nosso tratamento será baseado no artigo [1].

Advertimos o leitor acerca da demonstração: embora longa, a verificação da aditividade é de natureza geométrica, ao passo que a homogeneidade se reduzirá a uma interessante equação funcional. Valerá a pena!

Seja, então, $T : V \to V$ uma bijeção satisfazendo $T(0) = 0$. Se T transforma retas em retas, r e s serão concorrentes se, e só se, $T(r)$ e $T(s)$ o forem. Daí se conclui que T transforma vetores não colineares u e v em vetores não colineares $T(u)$ e $T(v)$. Mais ainda, T preserva paralelismo, isto é, $r//s \Rightarrow T(r)//T(s)$.

Agora, se T preserva paralelismo de retas, então T preserva paralelogramos. Em particular, se u e v são vetores não-colineares, T deve transformar o paralelogramo $\mathcal{P}$ gerado por u e v no paralelogramo $\mathcal{P}'$ gerado por $T(u)$ e $T(v)$. Daí segue que o vetor diagonal $u+v$ de $\mathcal{P}$ é transformado por T no vetor diagonal $T(u)+T(v)$ de $\mathcal{P}'$, ou seja, $T(u+v) = T(u)+T(v)$. Como $T(0) = 0$, provamos, assim, que T preserva a soma de dois vetores se um deles não é um múltiplo do outro.

Afirmamos agora que T é aditiva: $T(u+v) = T(u)+T(v)$, para *quaisquer* vetores $u,v \in V$. Só nos resta o caso em que u e v são colineares. Nesse caso, escolha um vetor w que não seja um múltiplo de u ou de v, e note que w também não é um múltiplo de $u + v$, bem como $v + w$ não é um múltiplo de u. Segue-se que T preserva a soma dos seguintes pares de vetores: $(u+v,w),(u,v+w)$ e (v,w). Portanto,

$$\begin{aligned}T(u+v)+T(w) &= T((u+v)+w)\\ &= T(u+(v+w))\\ &= T(u)+T(v+w)\\ &= T(u)+[T(v)+T(w)]\\ &= [T(u)+T(v)]+T(w),\end{aligned}$$

de onde segue a igualdade desejada, $T(u+v)=T(u)+T(v)$.

Sabendo que T é aditiva, devemos agora mostrar que T preserva o produto por escalar. *Fixe* um vetor $u \neq 0$ e considere a reta r_u gerada por u, ou seja, $r_u : z = tu, t \in \mathbb{R}$. Como $T(0)=0$, a aplicação T transforma r_u na reta $r_{T(u)} : w = sT(u), s \in \mathbb{R}$. Portanto, para cada número real t existe um único número real $f(t)$ satisfazendo $T(t \cdot u) = f(t) \cdot T(u)$, definindo, assim, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vejamos, agora, que f não depende do vetor u, isto é, provaremos que $T(t \cdot v) = f(t) \cdot T(v)$, para *qualquer* vetor $v \in V$ e para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Primeiro suponha que v não seja um múltiplo de u. O argumento anterior, aplicado aos vetores v e $u+v$, nos garante que existem funções $g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $T(t\cdot v) = g(t)\cdot T(v)$ e $T(t\cdot(u+v)) = h(t)\cdot T(u+v)$, para cada real t. Como T é aditiva, a última relação pode ser reescrita como $T(t\cdot u)+T(t\cdot v) = h(t)\cdot T(u)+h(t)\cdot T(v)$, ou ainda, $f(t)\cdot T(u)+g(t)\cdot T(v) = h(t)\cdot T(u)+h(t)\cdot T(v)$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Com um pouco mais de manipulação algébrica, chegamos em

$$[f(t)-h(t)]\cdot T(u) = [h(t)-g(t)]\cdot T(v). \qquad (1)$$

Sendo $T(u)$ e $T(v)$ vetores não colineares, a igualdade (1) nos garante que $f(t)-h(t) = 0 = h(t)-g(t)$, para cada número real t. Conclusão: $f = g$. Se agora v é um múltiplo de u, escolhemos um vetor w não-colinear com u e repetimos o argumento acima com os vetores w e v. Concluímos que g, a função associada ao vetor v, coincide com f, a função associada ao vetor w (e ao vetor u, pelo argumento anterior).

Resumindo, provamos que existe uma função f satisfazendo $T(t\cdot v) = f(t)\cdot T(v)$, para *qualquer* vetor $v \in V$ e para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Vejamos duas propriedades da função f:

1. f *é aditiva*, isto é, $f(s+t) = f(s) + f(t), \forall\, s,t \in \mathbb{R}$.
   Com efeito, como $T(u) \neq 0$, basta mostrar que $f(s+t) \cdot T(u) = [f(s) + f(t)] \cdot T(u)$:

$$\begin{aligned} f(s+t) \cdot T(u) &= T((s+t) \cdot u) \\ &= T(s \cdot u + t \cdot u) \\ &= T(s \cdot u) + T(t \cdot u) \\ &= f(s) \cdot T(u) + f(t) \cdot T(u) \\ &= [f(s) + f(t)] \cdot T(u), \end{aligned}$$

como desejado.

2. f *é multiplicativa*, ou seja, $f(st) = f(s)f(t), \forall\, s,t \in \mathbb{R}$.
   Mais uma vez, basta mostrar que $f(st) \cdot T(u) = [f(s)f(t)] \cdot T(u)$:

$$\begin{aligned} f(st) \cdot T(u) &= T((st) \cdot u) \\ &= T(s(t \cdot u)) \\ &= f(s) \cdot T(t \cdot u) \\ &= f(s) \cdot [f(t) \cdot T(u)] \\ &= [f(s)f(t)] \cdot T(u). \end{aligned}$$

Como $f(1) = 1$, o lema abaixo nos garante que f é a identidade, i.e., $f(t) = t$, para cada número real t.

Lema 14. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função aditiva e multiplicativa. Então, ou f é identicamente nula, ou f é a identidade.*

Portanto, com o lema acima, segue que $T(k \cdot v) = k \cdot T(v)$, para quaisquer $v \in V$ e $k \in \mathbb{R}$. Provamos, enfim, que T é linear. Segue o

Teorema 15. *Seja $T : V \to V$ uma bijeção com $T(0) = 0$. Então, T é linear se, e somente se, T transforma retas em retas.*

Prova do Lema (14)**.** Suponhamos que f não seja identicamente nula. Então, $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$. Caso contrário, teríamos $f(x) = 0$ e $f(t) = f(x \cdot \frac{t}{x}) = f(x)f(\frac{t}{x}) = 0$, para cada número real t, ou seja, f seria identicamente nula, contradizendo a nossa hipótese.

Segue, daí, que f é *crescente*: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. De fato, vale $f(y-x) + f(x) = f(y)$, ou seja, $f(y) - f(x) = f(y-x) = f(\sqrt{y-x})^2 > 0$, como queríamos.

Como $f(1) = f(1^2) = f(1)^2$ e $f(1) \neq 0$, temos $f(1) = 1$. Sendo $f(n+1) = f(n)+1$, para cada natural n, é fácil verificar por indução matemática que $f(n) = n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, afirmamos que $f(n) = n$ para cada inteiro n. Primeiramente, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ nos dá $f(0) = 0$. Daí, se $n \in \mathbb{N}$, $0 = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) \Rightarrow f(-n) = -n$, estabelecendo a afirmação feita.

Dado um número real x, seja n o maior inteiro que não supera x, de modo que $n \leq x < n+1$. Pelo que já foi provado, vale $n \leq f(x) < n+1$, de onde se vê que $|f(x) - x| < 1$. Como x é arbitrário, também vale $|f(mx) - mx| < 1$, para cada natural m, ou seja, $|f(x) - x| < 1/m$ para todo m. Se fosse $|f(x) - x| > 0$, a última desigualdade equivaleria a $|f(x) - x|^{-1} > m$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, contrariando o fato de haver números naturais arbitrariamente grandes. Logo, só pode ser $|f(x) - x| = 0$, de onde segue que $f(x) = x$, para todo número real x. Assim, f é a identidade. $\square$

O que podemos dizer de uma bijeção do plano $F : \Pi \to \Pi$ que transforma retas em retas? Fixe um ponto $O \in \Pi$, considere o vetor $v = \overrightarrow{OF(O)}$ e defina $A : V \to V$ por $A(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OF(P)} - v$. Então, $A(0) = 0$, A é bijetiva e transforma retas em retas, de onde se vê que A é uma aplicação linear invertível pelo Teorema (15). Dessa forma, temos $F(P) = O + [A(\overrightarrow{OP}) + v]$ ou, simplesmente,

$$F(P) = A(\overrightarrow{OP}) + v \tag{2}$$

(identificamos o ponto $F(P)$ com o vetor $\overrightarrow{OF(P)}$).

Em geral, quando uma aplicação $F : \Pi \to \Pi$ se expressar como na igualdade (2), sendo A uma aplicação linear arbitrária, diremos que F é uma *transformação afim*. Se A for invertível, F será chamada de *equivalência afim*. Nesse caso, é fácil ver que F admite uma inversa que ainda é uma equivalência afim. Por exemplo, semelhanças são equivalências afins.

Perceba o uso do termo "afim". Para funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que f é afim se $f(x) = ax + b$, para cada número real x, sendo a e b constantes reais. Desse modo, f é a composição da função linear $y = ax$ com a translação $y \mapsto y + b$.

Da mesma forma, uma transformação afim nada mais é do que uma aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que se expressa como a composta de uma aplicação linear A com a translação por um vetor v. Se $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ e $v = (e,f)$, teremos $F(x,y) = (ax + cy + e, bx + dy + f)$, qualquer que seja o par ordenado (x,y).

Em resposta à pergunta anterior, segue a versão do Teorema (15) para aplicações do plano.

Teorema 16. *Seja $F : \Pi \to \Pi$ uma bijeção. Então, F é uma equivalência afim se, e somente se, F transforma retas em retas.*

Dicas para o professor

Equivalências afins podem ser empregadas para simplificar problemas geométricos. Foi o que fizemos, na aula passada, durante a discussão da existência e unicidade da elipse de Steiner de um triângulo. Há aplicações mais simples desse método, por exemplo, o fato das medianas de um triângulo serem concorrentes: resolvida a questão para triângulos equiláteros, obtemos o resultado geral por meio de uma equivalência afim que transforma um triângulo equilátero no triângulo original. Sugerimos, para aperfeiçoamento dessa técnica, os exercícios correlatos da 3ª parte da referência [2].

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. F. A. Andrade. *Transformações do plano que aplicam retas em retas*. RMU, nº 38/39 - julho/dezembro 2005, pp. 99-104.

2. E. L. Lima. *Coordenadas no Plano*. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

3. E. L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2ª ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.