Material Teórico - Módulo Divisibilidade

A operação de divisão

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

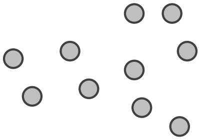
20 de maio de 2023

Portal da Matemática
OBMEP

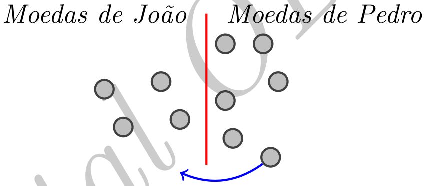
1 Divisões exatas

A divisão é uma das 4 operações fundamentais da Matemática, juntamente com a adição, a subtração e a multiplicação. Ela surge da necessidade de partilhar ou distribuir uma quantidade de objetos em grupos menores **de mesmo tamanho**. Veja o exemplo a seguir.

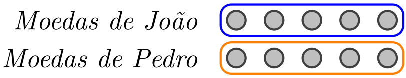
Exemplo 1. *Há 10 moedas dispostas em cima de uma mesa, de forma bagunçada.*



Os irmãos João e Pedro rapidamente se aproximaram da mesa e cada um pegou para si algumas moedas.



Acontece que Pedro pegou inicialmente 6 moedas e João pegou apenas 4. Na operação de divisão da Matemática, cada um deveria receber a mesma quantidade de moedas. Para isso, Pedro precisa dar uma moeda para João, de modo que cada um fique com 5 moedas. Agora, podemos organizar melhor as moedas (em 2 linhas, com 5 moedas cada):



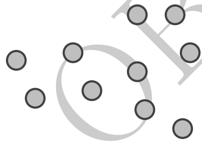
Com isso, ***o resultado de divisão de 10 (moedas) por 2 (irmãos) é de 5 (moedas para cada irmão).***

Dizendo de outra forma: ao dividir as 10 moedas em 2 grupos de mesmo tamanho, cada grupo terá 5 moedas. Em símbolos, podemos escrever:

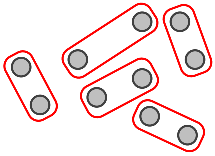
$$10 \div 2 = 5.$$

Ao realizar uma divisão, nem sempre é obvio quantos objetos serão alocados para cada grupo (no exemplo acima, para cada irmão). Na escola, você provavelmente estudou (ou irá estudar em breve) como fazer essa conta. Aqui, trabalharemos alguns estratégias diferentes para entender melhor a operação de divisão. No exemplo acima a estratégia foi começar com uma repartição qualquer e depois tentar melhorá-la. Vejamos outra forma.

Exemplo 2. *Começamos com o mesmo conjunto de 10 moedas do exemplo anterior.*



No lugar de tentar formar 2 grupos diretamente, vamos organizar as moedas em duplas. Para isso, circulamos as duplas, uma a uma. Como as moedas são idênticas, há várias maneiras de fazer isso. Escolha uma qualquer, por exemplo:

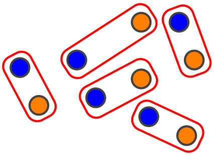


Agora basta contar quantos grupos fizemos: 5 grupos. Dessa forma, podemos dizer que ***10 moedas divididas em grupos de 2 moedas resultam em 5 grupos****.*

Em símbolos, novamente temos:

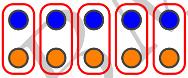
$$10 \div 2 = 5.$$

Compare o exemplo 1 com o exemplo 2. Podemos usar as duplas do exemplo 2 para dividir as moedas entre os irmãos. Basta que cada irmão pegue exatamente 1 moeda de cada dupla. Assim, a quantidade de moedas que cada irmão recebe é exatamente a mesma quantidade de grupos de 2 moedas. Na figura abaixo, temos exatamente 5 moedas azuis (para Pedro) e 5 moedas laranjas (para João).



De forma mais organizada:

Moedas de João
Moedas de Pedro



O exemplo 2 também nos diz que, ao dividirmos 10 moedas em 5 grupos, cada grupo terá 2 moedas. Com isso, chegamos a uma conclusão importante:

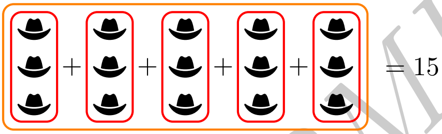
> Se o resultado da divisão de 10 por 2 é igual a 5, então o resultado da divisão de 10 por 5 é igual a 2. Também, isso é o mesmo que dizer que 2 vezes 5 é igual a 10.

Afinal, o total de moedas é igual à quantidade de grupos multiplicada pela quantidade de moedas em cada grupo. Essa conclusão vale para quaisquer naturais não nulos (de fato, também vale para números negativos ou não inteiros, desde que sejam diferentes de zero).

> Se $n = a \times b$ onde a e b são naturais não nulos, então podemos dividir n objetos em b grupos de a elementos e também podemos dividir os n objetos em a grupos de b elementos $(n \div a = b)$. Assim, n dividido por a é igual a b e n dividido por b é igual a a $(n \div b = a)$.

Exemplo 3. *Divida 15 chapéus para 3 crianças, de forma que todas as crianças recebam uma mesma quantidade de chapéus. Quantos chapéus cada criança receberá? Haverá sobra de chapéus?*

Solução. Desenhe os 15 chapéus num papel (se não souber desenhar um chapéu, basta fazer 15 pontos). Faça isso desenhando-os em grupos de 3 chapéus (pois 3 é o número de crianças), $3 + 3 + 3 + \ldots$, até chegar ao total de 15. Note que o total será atingido no quinto grupo (veja a figura abaixo). Assim, 15 dividido por 3 é igual a 5.



Agora, basta que cada criança pegue um chapéu de cada grupo para reorganizarmos a solução em 3 grupos de 5 chapéus.

□

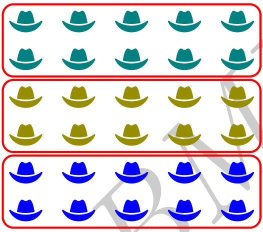
Vejamos outra propriedade importante da divisão, que nos ajudará bastante a fazer contas.

Imagine que você dividiu um certo número de objetos em grupos de mesmo tamanho. Se você multiplicar o total de objetos por um número k e continuar dividindo pela mesma quantidade de grupos, então a quantidade de objetos em cada grupo também será multiplicada por k.

Exemplo 4. *Já sabemos que 15 (objetos) dividido(s) em 3 (grupos) resulta em 5 (objetos por grupo). Se começarmos com um total 2 vezes maior, ou seja, 30 objetos, e continuarmos dividindo-os em 3 grupos, obteremos* 10 *objetos em cada grupo.*

$$15 \div 3 = 5 \implies (2 \times 15) \div 3 = 2 \times 5 \implies 30 \div 3 = 10.$$

Isso pode ser ilustrado na imagem abaixo, onde dobramos a quantidade de chapéus em cada grupo e, por conseguinte, dobramos a quantidade total de chapéus.



Exemplo 5. *Use a ideia do exemplo anterior para calcular 120 dividido por 4.*

Solução. Observe que $120 = 12 \times 10$. Assim, ao invés de tentar dividir diretamente 120 por 4, iremos primeiro dividir 12 por 4. Claramente, o resultado é igual a 3, ou seja, $12 \div 4 = 3$. (Já que, ao partir 12 objetos em 4 grupos iguais, cada grupo terá 3 objetos.) Como a total foi multiplicado por 10, nossa resposta (que nesse caso é a quantidade de objetos em cada grupo) também será multiplicada por 10. Assim, $120 \div 4 = 10 \times 3 = 30$. Logo, a resposta é 30. □

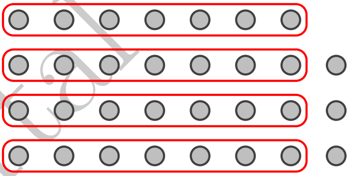
Solução alternativa. Da mesma forma, vemos que $120 = 12 \times 10$ e começamos dividindo 12 por 4. Agora, fazemos isso montando grupos de tamanho 4 (ou seja, seguindo a técnica de ir adicionando $4 + 4 + \ldots$. Conseguimos formar apenas 3 grupos completos. Assim, $12 \div 4 = 3$. Como a total foi multiplicado por 10 (para ir de 12 a 120), nossa resposta também será multiplicada por 10 (aqui, a resposta é a quantidade de grupos). Logo, a resposta passa a ser 30.

Como antes, interpretamos que $120 \div 4 = 10 \times 3 = 30$. □

Observação 6. *Na solução alternativa, também é verdade que se multiplicarmos os tamanhos dos grupos por 10, obtendo grupos com 40 elementos, continuaremos obtendo apenas 3 grupos. Ou seja,* $120 \div 40 = 3$ *(que é o mesmo que* $120 \div 3 = 40$*). Mas não é isso que a questão estava perguntando. Queremos encontrar o resultado da divisão por 4. Por isso, temos que usar 4 grupos ou grupos de tamanho 4. Assim, a resposta correta é 30, e não 40.*

2 Divisões com resto

É claro que nem sempre podemos realizar divisões exatas: às vezes é impossível que todos os grupos tenham exatamente o mesmo tamanho. Por exemplo, se tentarmos dividir 27 objetos para 4 pessoas, conseguimos dar 6 objetos para cada pessoas pois $6 \times 4 = 24 \leq 27$. Contudo, não conseguimos dar 7 objetos para cada um (pois $7 \times 4 = 28$ é maior que o total de objetos).[1] Ao distribuir os 24 objetos, ainda sobram 3, pois: $27 - 24 = 3$. Esse número, 3, é chamado de **resto** da divisão de 27 por 4.



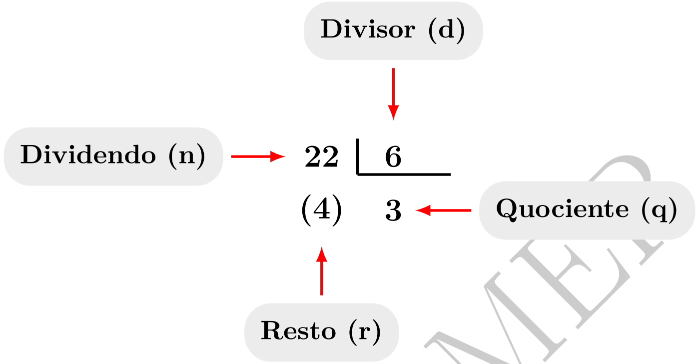
Dizemos que a divisão é exata quando o resto é igual a zero. Assim, a divisão de 27 por 4 não é exata, uma vez que o resto é igual a 3.

Os números que aparecem numa operação de divisão (exata ou não) também recebem nomes especiais: **dividendo** (o total de objetos que estamos repartido), **divisor** (o número de grupos ou pessoas que receberão os objetos) e **quociente**

[1] Alternativamente, podemos tentar dividir os 27 objetos em grupos de tamanho 4. Nesse caso, conseguimos formar 7 grupos completos e sobram 3 objetos.

(quantos objetos cada pessoa receberá quando descartamos o resto).

A figura abaixo mostra como devemos organizar esses números no chamado "dispositivo da divisão".



IMPORTANTE: para ser considerado "resto" da divisão, a sobra tem que ser tão pequena que não seja mais possível dividi-la pela quantidade de pessoas/grupos, ou seja, **o resto sempre tem que ser um número estritamente menor do que o divisor**. Além disso, vale que:

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{quociente} + \text{resto}.$$

Chamando o dividendo de n, o divisor de d e o quociente de q, temos, simplificadamente:

$$n = d \times q + r.$$

Com esses nomes, podemos reescrever a segunda propriedade da seção anterior da seguinte forma.

> Numa divisão exata, se multiplicarmos o dividendo por um natural k, o quociente da divisão também será multiplicado por k.

De fato, estamos no caso em que $r = 0$, e vale que:

$$\begin{aligned} n \div d = q &\implies n = d \times q \\ &\implies k \times n = d \times (k \times q) \\ &\implies (k \times n) \div d = k \times q. \end{aligned}$$

Algo parecido continua valendo quando há sobras: se multiplicarmos o dividendo por k, tanto o quociente como a sobra serão multiplicados por k, pois

$$n = d \times q + r \implies k \times n = d \times (k \times q) + k \times r.$$

Mas, tome muito cuidado: é possível que a nova sobra, o valor kr, seja maior que o divisor d e, assim, possa ser repartido entre os d grupos. Dessa forma, kr é uma sobra, mas *pode não ser o resto* da divisão de kn por d. Para deixar isso mais claro, vejamos um exemplo, que ilustra como a propriedade acima pode nos ajudar a fazer divisões com dividendos grandes via agrupamentos e reagrupamentos dos objetos.

Exemplos 7. *Sabendo que* $182 = 7 \times 26$*, calcule o quociente e o resto da divisão de 182 por 4.*

Solução. Já recebemos a dica de que $182 = 7 \times 26$. Assim, no lugar de repartir diretamente 182 por 4, vamos começar dividindo 26 por 4. Veja que

$$26 = 24 + 2 = 4 \times 6 + 2,$$

logo, temos quociente 6 e resto 2. (Formamos 4 grupos de 6 objetos e sobrou 2). Multiplicando o total (dividendo) por 7, obtemos ainda os 4 grupos, mas com 7 vezes mais objetos em cada grupo e uma sobra 7 vezes maior. Ou seja, os 182 objetos originais podem ser organizados em 4 grupos de $7 \times 6 = 42$ objetos e sobram ainda $7 \times 2 = 14$ objetos. Em símbolos:

$$7 \times 26 = 7 \times (4 \times 6 + 2) \implies 182 = 4 \times 42 + 14.$$

Note que os números 42 e 14 ainda não são o quociente e resto que procuramos. Isso porque as 14 unidades que sobraram ainda podem ser repartidas em 4 grupos: $14 = 4 \times 3 + 2$. Assim, podemos distribuir mais 3 unidades para cada um dos grupos e sobram apenas 2 unidades. Portanto, o quociente passa a ser $42 + 3 = 45$ e o resto é igual a 2. Finalmente:

$$182 = 4 \times 45 + 2,$$

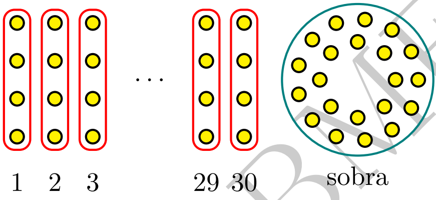
onde 45 é o quociente e 2 é o resto. □

Outra maneira de realizar a divisão é fazendo uma busca exaustiva pelo quociente, chutando alguns valores e melhorando cada vez mais nossa aproximação.

Exemplo 8. *Calcule o resultado da divisão de 141 por 4.*

Solução Alternativa. Queremos dividir 141 objetos em grupos de 4 objetos. Partindo de uns 30 grupos, por exemplo, obtemos $30 \times 4 = 120$ objetos e ainda sobram $141 - 120 = 21$ objetos para serem repartidos. Dessa forma,

$$141 = 4 \times 30 + 21.$$



A partir daqui, podemos prosseguir de duas maneiras:

Alternativa 1: se tentássemos formar 40 grupos, precisaríamos de $40 \times 4 = 160$ objetos, o que não temos. Assim, o quociente é maior ou igual a 30 e é menor do que 40. Daí, podemos ir tentando quocientes intermediários, somando 4 unidades por vez:

$$\begin{aligned}4 \times 31 &= 124,\\ 4 \times 32 &= 128,\\ 4 \times 33 &= 132,\\ 4 \times 34 &= 136,\\ 4 \times 35 &= 140,\\ 4 \times 36 &= 144.\end{aligned}$$

O mais próximo que podemos chegar de 141, sem passar dele, é com quociente 35. Nesse caso, obtemos 140 e resta apenas 1 unidade sem grupo. Ou seja, temos quociente 35 e resto 1.

Alternativa 2: Uma vez que $141 = 4 \times 30 + 21$, basta distribuir os 21 números que sobraram. Veja que podemos formar outros 5 grupos, já que $21 = 4 \times 5 + 1$, e sobra apenas 1 unidade. Logo, o quociente é o total de grupos formados, $30 + 5 = 35$, ao passo que o resto é igual a 1. Em símbolos:

$$\begin{aligned} 141 &= 4 \times 30 + 21 \\ &= 4 \times 30 + 4 \times 5 + 1 \\ &= 4 \times (30 + 5) + 1 \\ &= 4 \times 35 + 1. \end{aligned}$$

$\square$

Dicas para o Professor

Caso seja a primeira vez que os alunos estejam entrando em contato com a operação de divisão, aborde o tema com calma. Introduzir um conceito completamente novo para alunos que nunca o estudaram é sempre algo desafiador. Busque fazer mais exemplos além dos que colocamos aqui, incluindo figuras/diagramas, com situações do cotidiano: brinquedos, dinheiro, etc. Dê um tempo até chegar a montar o dispositivo da divisão e de introduzir a nomenclatura (dividendo, divisor, quociente e resto).

Para alunos que já tenham familiaridade com o tema, a seção 1 pode ser uma maneira alternativa de abordá-lo, sem usar inicialmente o dispositivo da divisão, focando nos conceitos e maneiras alternativas de realizar as contas (até mesmo de cabeça). Por outro lado, a seção 2 pode ser feita, ainda nesse caso, como uma revisão da nomenclatura.