Material Teórico - Módulo Teorema de Pitágoras e Aplicações

Algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras - Parte 1

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

30 de março de 2019

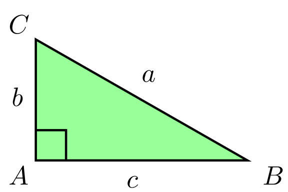
PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 O Teorema de Pitágoras

No módulo “Semelhança de Triângulos e o Teorema de Tales”, mais precisamente na aula sobre relações métricas no triângulo retângulo, apresentamos a demonstração mais comum do Teorema de Pitágoras, utilizando semelhança de triângulos. Nesta aula, apresentaremos outras ideias para demonstrar este mesmo teorema.

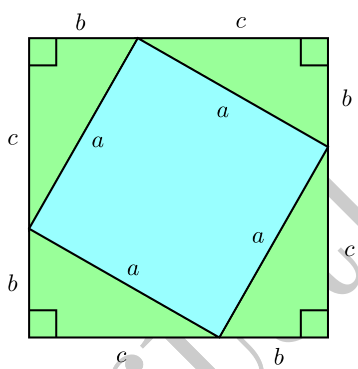
Teorema 1 (Pitágoras). *Se os catetos de um triângulo retângulo ABC medem b e c e sua hipotenusa mede a, então*

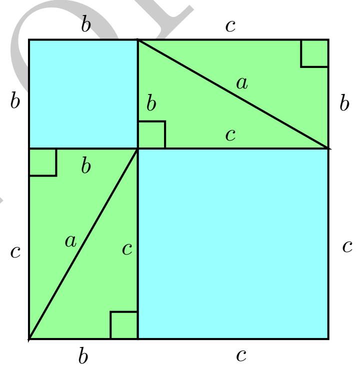
$$a^2 = b^2 + c^2.$$



A primeira das demonstrações que apresentaremos tem forte apelo geométrico. A ideia é dividir de modo adequado as áreas de dois quadrados de lado $a + b$ e, em seguida, comparar essas áreas (iguais).

Demosntração 1. Observe os dois quadrados de lado $a+b$ desenhados nas figuras a seguir:





É claro que as áreas dos dois quadrados têm a mesma medida, $(b + c)^2$.

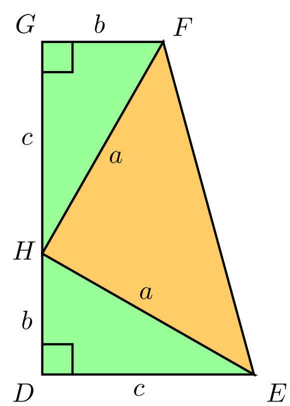
Observe que o primeiro quadrado foi decomposto em 4 triângulos retângulos congruentes e um quadrilátero que possui lados congruentes. Além disso, a medida dos ângulos internos desse quadrilátero é 90^o, pois a soma dos ângulos agudos dos triângulos também é igual a 90^o. Logo, esse quadrilátero é um quadrado e sua área mede a^2.

Por outro lado, o segundo quadrado pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes aos que compõem o primeiro quadrado, juntamente com dois quadrados, um de lado b (logo, com área b^2) e o outro de lado c (logo, com área c^2).

Portanto, comparando as áreas das porções azuis das duas figuras, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$. □

Na próxima demonstração, calcularemos a área de um trapézio retângulo de bases b e c e altura $b + c$ de dois modos distintos: (i) utilizando a fórmula para o cálculo da área do trapézio; (ii) dividindo o trapézio em triângulos e calculando as suas áreas. Ela é devida a James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos de março a setembro de 1881.

Demonstração 2 (Garfield). Considere o trapézio retângulo $DEFG$ desenhado na figura abaixo:



Veja que as bases de $DEFG$ têm medidas b e c, e sua altura, por se tratar de um trapézio retângulo, mede $b + c$. Portanto,

$$[DEFG] = \frac{(b + c) \cdot (b + c)}{2} = \frac{(b + c)^2}{2}.$$

Por outro lado, $[DEFG] = [DEH] + [FGH] + [EFH]$. Os dois primeiros triângulos, DEH e FGH, são congruentes e suas áreas medem $\frac{bc}{2}$. Além disso, EFH é retângulo em H, pois

$$D\widehat{H}E + E\widehat{H}F + F\widehat{H}G = 180^o$$

e

$$D\widehat{H}E + F\widehat{H}G = 90^o,$$

logo,

$$\begin{aligned} E\widehat{H}F &= 180^{\text{o}} - \left(D\widehat{H}E + F\widehat{H}G\right) \\ &= 180^{\text{o}} - 90^{\text{o}} = 90^{\text{o}}. \end{aligned}$$

Daí, segue que $[EFH] = \frac{a^2}{2}$.

Comparando as duas expressões para a área de $DEFG$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)^2}{2} &= [DEH] + [FGH] + [EFH] \\ &= 2 \cdot \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}, \end{aligned}$$

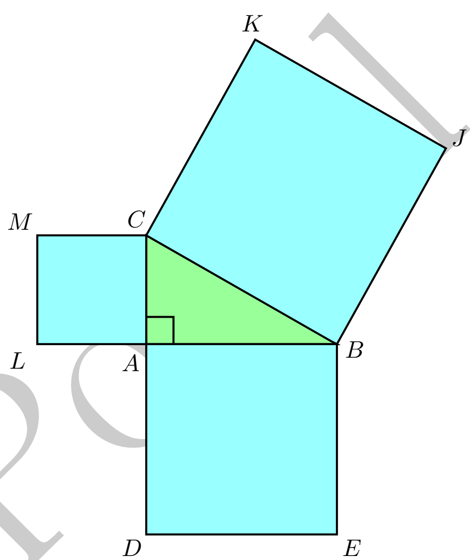
de sorte que

$$\frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2}.$$

Então, $b^2 + \cancel{2bc} + c^2 = \cancel{2bc} + a^2$, o que implica $b^2 + c^2 = a^2$. □

A próxima demonstração do Teorema de Pitágoras é devida ao matemático amador britânico Henry Perigal Jr., que viveu durante o século XIX. A demonstração de Perigal consiste em construir quadrados sobre os catetos e a hipotenusa de ABC e, em seguida, mostrar que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Demonstração 3 (Perigal). Inicialmente, considere os quadrados $ABED$, $ACML$ e $BCKJ$, construídos sobre os lados do triângulo ABC (veja a figura abaixo).

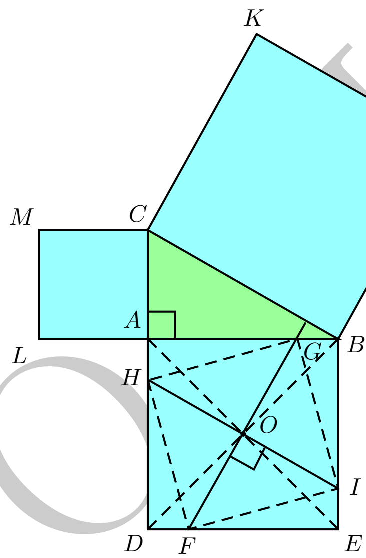


Mostraremos que

$$[BCKJ] = [ABED] + [ACML],$$

ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$. A ideia é decompor $ABDE$ em peças que, reposicionadas e com o auxílio de $ACML$, montam $CBJK$ (veja a figura **??**).

Trace (acompanhe na figura abaixo) o segmento FG, que passa pelo centro O do quadrado $ABED$ e cujo prolongamento é perpendicular à hipotenusa BC. Agora, trace também o segmento HI, perpendicular a FG e que também passa por O.



Considerando a diagonal AE, do quadrado $ABED$, notamos que os triângulos AOH e EOI são congruentes (caso ALA, usando o fato de que o centro do quadrado é o ponto médio da diagonal). Daí, obtemos $\overline{OH} = \overline{OI}$ e $\overline{AH} = \overline{EI}$. Analogamente, os triângulos DOF e BOG também são congruentes

Uma vez que

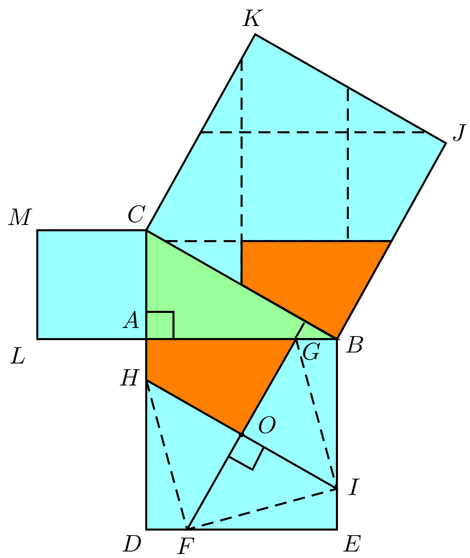
$$\begin{aligned} F\widehat{O}D &= F\widehat{O}H - D\widehat{O}H \\ &= F\widehat{O}H - \left(D\widehat{O}A - H\widehat{O}A\right) \\ &= 90^{\text{o}} - (90^{\text{o}} - H\widehat{O}A) \\ &= H\widehat{O}A, \end{aligned}$$

esses triângulos também são congruentes a AOH e EOI (outra vez utilizando o caso ALA). Portanto, os triângulos FOI, IOG, GOH e HOF são todos congruentes, assim como o são os triângulos FEI, IBG, GAH e HDF.

Juntando todas essas informações, concluímos que o quadrado $ABED$ foi dividido em quatro quadriláteros cujas áreas têm as mesmas medidas: $AHOG$, $DFOH$, $EIOF$ e $BGOI$.

Agora, traçamos os quatro segmentos pontilhados da próxima figura, os quais passam pelos pontos médios dos lados do quadrado $BCKJ$, sendo dois paralelos ao cateto AB e outros dois paralelos ao cateto AC.

Observando que $CBIH$ é um paralelogramo e que há uma correspondência entre os lados dos quadriláteros pintados de laranja na figura abaixo tal que lados correspondentes são paralelos, é possível concluir que esses quadriláteros têm uma mesma área.



De modo análogo, é possível mostrar que as áreas dos demais quadriláteros nos quais o quadrado $ABED$ foi dividido correspondem a três outros quadriláteros dentro do quadrado $BCKJ$, de sorte que a área pintada de laranja no quadrado $BCKJ$ (veja a próxima figura) é igual à área de $ABED$.

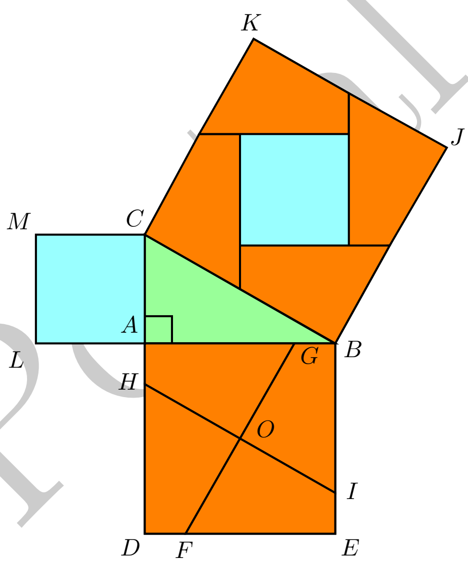


Figura 1: o tangram de Perigal.

Por fim, note que

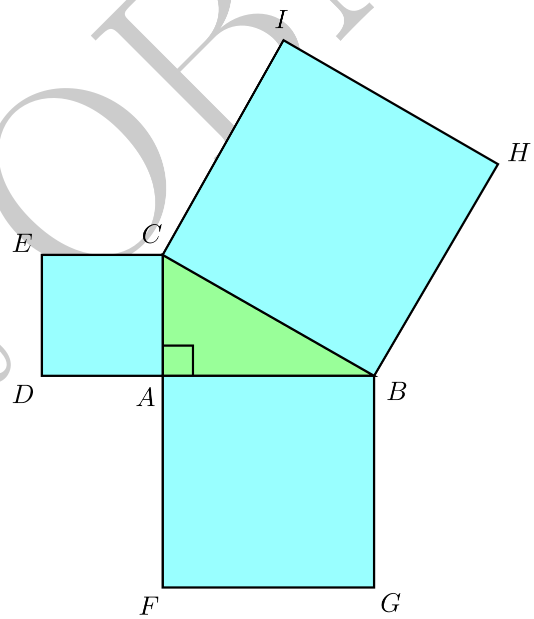
$$\overline{BI} = \overline{CH} = \overline{AC} + \overline{AH},$$

logo, os quadrados pintados de azul também têm a mesma área.

$\square$

A próxima demonstração é devida ao próprio Euclides de Alexandria, e também consiste em construir quadrados sobre os lados do triângulo ABC e mostrar que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos outros dois.

Demonstração 4 (Euclides). Outra vez, considere os quadrados construídos sobre os catetos e a hipotenusa de ABC. Na figura, esses quadrados são denotados por $ABGF$, $ACED$ e $CBHI$. $\square$



Agora, seja J o pé da perpendicular a HI passando por A. A ideia é mostrar que a área do retângulo $CIJK$ é igual à área do quadrado $ACED$, e que a área do retângulo $BHJK$ é igual à área do quadrado $ABGF$.

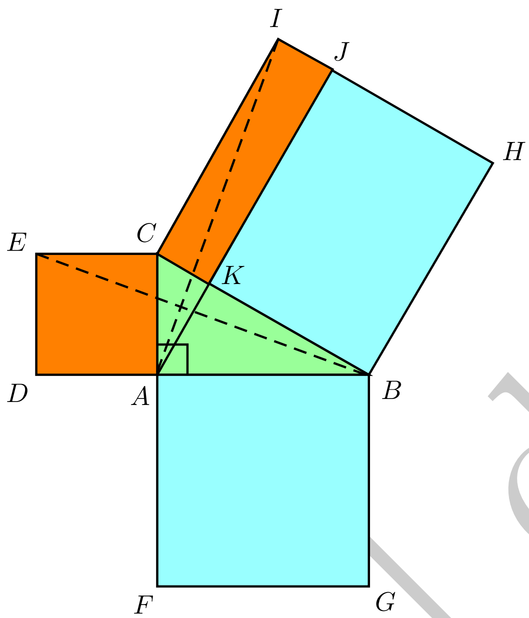
Para mostrar que $[CIJK] = [ACED]$, note que os triângulos ECB e ACI são congruentes (caso LAL), pois $\overline{EC} = \overline{AC}$, $\overline{CB} = \overline{CI}$ e

$$\begin{aligned} E\widehat{C}B &= E\widehat{C}A + A\widehat{C}B \\ &= 90^{\text{o}} + A\widehat{C}B \\ &= I\widehat{C}B + A\widehat{C}B \\ &= A\widehat{C}I. \end{aligned}$$

Além disso, $[ACI] = [KCI]$, pois, em relação à base comum CI, esses triângulos têm a mesma altura (uma vez que $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CI}$). Analogamente, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ implica $[ECB] = ECA]$. Juntando todas as informações colecionadas acima, obtemos

$$\begin{aligned}[CIJK] &= 2 \cdot [KCI] \\ &= 2 \cdot [ACI] \\ &= 2 \cdot [ECB] \\ &= 2 \cdot [ECA] \\ &= [ACED].\end{aligned}$$

O mesmo argumento pode ser utilizado para mostrar que $[BHJK] = [ABGF]$. Daí, podemos concluir que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, donde segue o Teorema de Pitágoras.



Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor todo o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que, antes de apresentarem as demonstrações, revisem com os alunos os casos de congruência de triângulos. É importante que todas as demonstrações sejam apresentadas com todos os detalhes, para que não restem dúvidas. Recomendamos, ainda, que seja dada uma atenção especial à demonstração de Perigal, pois ela é muito cheia de detalhes (que podem passar despercebidos) e ideias (que podem ser úteis para resolver problemas futuros).

A primeira das referências listadas abaixo apresenta outras demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.