Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2

Função Inversa

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

29 de fevereiro de 2020

1 Funções bijetivas e inversão

Lembremos a seguinte definição, vista na aula *Injetividade e Sobrejetividade* deste módulo: dizemos que uma função $f : A \to B$ *admite inversa* $g : B \to A$ quando $f \circ g : B \to B$ é a função identidade $I_B : B \to B$, dada por $I_B(b) = b$, e $g \circ f : A \to A$ é a função identidade $I_A : A \to A$, dada por $I_A(a) = a$.

Já vimos, no Teorema 13 dessa mesma aula sobre *Injetividade e Sobrejetividade* do presente módulo, que

> uma função admite inversa se, e somente se, é bijetiva.

Chamamos uma função que admite inversa de **função invertível**.

Também vimos na referida aula (Observação 14) que, quando a inversa de uma função f existe, ela é única. Por conta disso, nesse caso usamos a notação f^{-1} para indicar a inversa da função f.

A seguir, obteremos as inversas de algumas funções.

Exemplo 1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, uma função afim não constante. Sabemos que f é bijetiva, de sorte que admite inversa. Além disso, $f(f^{-1}(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $a \cdot f^{-1}(x) + b = x$, ou seja, $a \cdot f^{-1}(x) = x - b$. Como $a \neq 0$, temos*

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}.$$

Esta última função também é afim, o que nos permite dizer que

> *a inversa de uma função afim não constante também é uma função afim não constante.*

Podemos interpretar geometricamente uma função afim não constante e sua inversa da seguinte maneira: dado um intervalo $[u, v] \subset \mathbb{R}$, a multiplicação por $a \neq 0$ transforma esse intervalo, de comprimento $v - u$, em um intervalo de comprimento $|a|(v-u)$, ou seja, a multiplicação por a provoca uma mudança no comprimento do intervalo, podendo dilatá-lo ou contraí-lo. Além disso, o sinal de a determina se há ou não uma mudança de orientação no intervalo: se $a > 0$, a multiplicação por a transforma o intervalo $[u, v]$ no intervalo $[au, av]$; caso $a < 0$, a multiplicação por a transforma o intervalo $[u, v]$ no intervalo $[av, au]$ ($u < v$ e $a < 0$ implicam $av < au$).

A soma com a constante b corresponde a uma translação do intervalo de b unidades, para a direita se $b > 0$, ou para a esquerda se $b < 0$. Se $b = 0$, não há translação. Assim, o intervalo $[u, v]$ é levado por f no intervalo $[au+b, av+b]$, se $a > 0$, ou no intervalo $[av + b, au + b]$, se $a < 0$.

A inversa, dada por $f^{-1}(x) = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}$, "desfaz" o que f faz: supondo que $a > 0$ e fazendo f^{-1} agir sobre o intervalo $[au+b, av+b]$, inicialmente ele tem o seu tamanho alterado pela multiplicação por $\frac{1}{a}$, sendo levado no intervalo $[u + b/a, v + b/a]$. Em seguida, a translação que corresponde à subtração por $-b/a$ faz com que esse último intervalo seja levado em $[u, v]$.

Exemplo 2. *Em geral, se $I \subset \mathbb{R}$ e $J \subset \mathbb{R}$ são intervalos, uma função quadrática $f : I \to J$, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, não é bijetiva, logo, não tem inversa. Neste exemplo, vamos encontrar, para uma função quadrática f dada, os maiores intervalos tais que f é bijetiva. Além disso, tomando tais intervalos como domínio e contradomínio, vamos obter a expressão da inversa de f.*

A forma canônica de f é

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \tag{1}$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, temos que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2}. \tag{2}$$

Se $a > 0$, a multiplicação da desigualdade (2) por a fornece

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \geq -\frac{\Delta}{4a}. \tag{3}$$

Neste caso, $-\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo de $f(x)$, quando x percorre o conjunto $\mathbb{R}$. Assim a imagem de f é o intervalo $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$. (Para mais detalhes, veja o módulo sobre funções quadráticas.)

Se $a < 0$, a multiplicação de (2) por a inverte a desigualdade, fornecendo

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \leq -\frac{\Delta}{4a}. \tag{4}$$

Neste caso, $-\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo de $f(x)$ quando x percorre o conjunto $\mathbb{R}$, e a imagem de f é o intervalo $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

Dados números reais x_1 e x_2 simétricos em relação a $-\frac{b}{2a}$, ou seja, tais que $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, temos $f(x_1) = f(x_2)$. Para justificar essa afirmação, veja que $x_2 = -x_1 - \frac{b}{a}$, logo,

$$\begin{aligned}\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(-x_1 - \frac{b}{a} + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(-x_1 - \frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2.\end{aligned}$$

Substituindo essa igualdade em (1), obtemos que $f(x_2) = f(x_1)$. Se $x_1 > -\frac{b}{2a}$, então $x_2 < -\frac{b}{2a}$. Assim, para que f seja injetiva, devemos escolher o domínio de f como $I = \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ ou $I = \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

Em resumo, para $a > 0$, se $I = \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ ou $I = \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e $J = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, então a função $f : I \to J$, dada por $f(x) = ax^2+bx+c$, é bijetiva. Da mesma forma, para $a < 0$, se $I = \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ ou $I = \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e $J = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$, então essa mesma função é bijetiva.

A seguir, obteremos a expressão da inversa da função $f : \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right) \to \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ dada por $f(x) = ax^2+bx+c$, com $a > 0$. (Os outros casos podem ser tratados de modo análogo.) Para isso, uma vez que

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

precisamos resolver a equação $f(x) = y$ para x. Usando a forma canônica (1), *obtemos*

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = y.$$

Então,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{y}{a},$$

isto é,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{4ay+\Delta}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{4ay+\Delta}}{4|a|}.$$

Uma vez que $f^{-1} : \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right) \to \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, temos $x + \frac{b}{2a} \geq 0$; logo, no segundo membro acima devemos tomar o sinal $+$. Além disso, $|a| = a$, pois $a > 0$. Assim,

$$f^{-1}(y) = x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ay+\Delta}}{2a}.$$

O próximo exemplo ilustra a discussão do exemplo anterior para valores específicos dos coeficientes a, b e c.

Exemplo 3. *Em relação a $f(x) = x^2-5x+6$, temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$. Assim, $-\frac{b}{2a} = \frac{5}{2}$, $\Delta = b^2 - 4ac = 1$ e $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$. Consideremos, pois, f como a bijeção $f : [5/2, +\infty) \to [-1/4, +\infty)$. Para obter sua inversa f^{-1}, note que, se $x = f^{-1}(y)$, então $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$. Resolvendo essa equação, podemos expressar x em função de y:*

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1-4y}}{2}.$$

Como o contradomínio da inversa f^{-1} é $[5/2, +\infty)$, devemos escolher o sinal positivo na expressão acima, obtendo

$$f^{-1}(y) = \frac{5+\sqrt{1-4y}}{2}.$$

2 O gráfico da função inversa

Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$ e seja $f : I \to J$ uma função bijetiva, com inversa $f^{-1} : J \to I$. Os gráficos de f e f^{-1} são os conjuntos

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$$

e

$$\mathrm{Gr}(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in J\}.$$

Como $f(x) = y$ é equivalente a $x = f^{-1}(y)$, o gráfico da função inversa f^{-1} pode ser escrito como

$$\mathrm{Gr}(f^{-1}) = \{(f(x), x) \mid x \in I\},$$

ou seja, os pares ordenados pertencentes a $\mathrm{Gr}(f^{-1})$ são exatamente aqueles obtidos invertendo-se a ordem dos pares ordenados pertencentes a $\mathrm{Gr}(f)$.

Considere os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (b, a)$ no plano cartesiano. O ponto médio do segmento PQ é $M = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}\right)$, o qual pertence à reta de equação $y = x$. Por sua vez, a reta determinada pelos pontos P e Q tem coeficiente angular $m_1 = \frac{b-a}{a-b} = -1$. Uma vez que a reta de equação $y = x$ tem coeficiente angular $m_2 = 1$ e $m_1 m_2 = -1$, essas duas retas são perpendiculares. Isso significa que a reta de equação $y = x$ é a *mediatriz* do segmento PQ, ou seja, os pontos P e Q são *simétricos* em relação à reta de equação $y = x$. Podemos, então, dizer que

> ao invertermos as coordenadas de um ponto $P = (a, b)$, obtemos um ponto $Q = (b, a)$ que é a imagem de P pela *reflexão* em torno da reta de equação $y = x$.

A discussão acima nos leva a concluir que o gráfico de uma função f, formado pelos pontos do tipo $(x, f(x))$, e o gráfico de sua inversa f^{-1}, formado pelos pontos do tipo $(f(x), x)$ são figuras simétricas em relação à reta de equação $y = x$. Na Figura 1, o gráfico da função dada por $f(x) = x^3$ é representado com um linha cheia e o gráfico de sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ é representado por uma linha tracejada.

Exemplo 4. *Utilizando a conclusão acima, podemos desenhar facilmente o gráfico da inversa f^{-1} da função $f : [5/2, 5] \to [-1/4, 6]$, dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$. A figura 2 mostra tal gráfico, juntamente com aquele da função original f:*

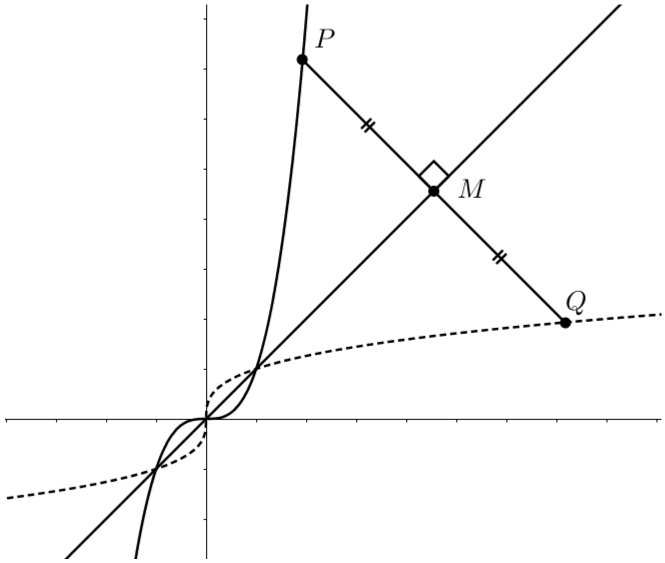

Figura 1: gráfico de uma função (linha cheia) e de sua inversa (linha tracejada).

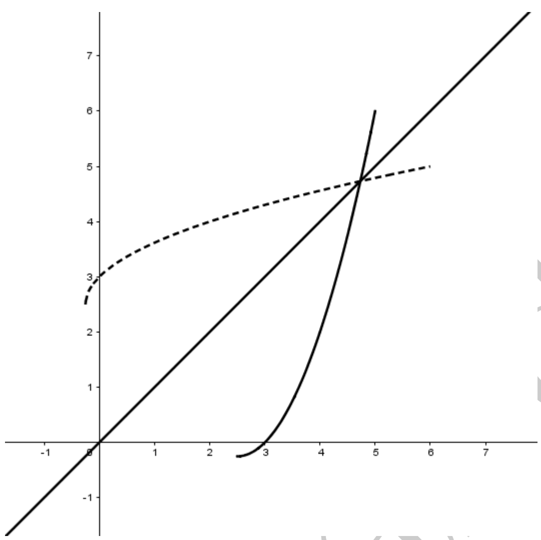

Figura 2: gráfico da função f (linha cheia) e de sua inversa f^{-1} (linha tracejada).

3 A inversa de uma composta

Ainda como consequência de dois resultados da aula *Injetividade e Sobrejetividade* (teoremas 3 e 9), podemos ver que a composta de duas funções bijetivas é uma função bijetiva; assim, tal composta também admite função inversa.

A partir das observações feitas acima, podemos perguntar: se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são duas funções invertíveis, com inversas $f^{-1} : B \to A$ e $g^{-1} : C \to B$, existe alguma relação entre f^{-1}, g^{-1} e a inversa da composta $g \circ f : A \to C$?

Uma pista para encontrarmos a resposta à pergunta acima é observarmos o domínio e o contradomínio de $g \circ f$, os quais são os conjuntos A e C, respectivamente. Assim, $g \circ f$ é uma função de A em C, de sorte que sua inversa $(g \circ f)^{-1}$ deve ter domínio C e contradomínio A (veja o diagrama a seguir):

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Obverve, agora, que a função g^{-1} tem domínio C, igual ao domínio de $(g \circ f)^{-1}$, enquanto a função f^{-1} tem contradomínio A, igual ao contradomínio de $(g \circ f)^{-1}$. Portanto, podemos formar a composta $f^{-1} \circ g^{-1}$, a qual é uma função de C em A, conforme mostrado no diagrama a seguir:

$$C \xrightarrow{g^{-1}} B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

A discussão acima nos leva a suspeitar que $(g \circ f)^{-1}$ *pode ser igual a* $f^{-1} \circ g^{-1}$. Vamos verificar que esse é realmente o caso.

Chame a inversa de $g \circ f$ de h. Isso significa que $(g \circ f) \circ h = I_C$, isto é, a composta de $g \circ f$ com h é a função identidade de C. Entretanto, a associatividade da composição garante que $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$, de modo que $g \circ (f \circ h) = I_C$. Como g tem uma inversa g^{-1}, compondo a última igualdade de funções (à esquerda) com g^{-1}, obtemos

$$g^{-1} \circ (g \circ (f \circ h)) = g^{-1} \circ I_C,$$

ou seja (novamente pela associatividade da composição),

$$(g^{-1} \circ g) \circ (f \circ h) = g^{-1}.$$

Como $g^{-1} \circ g = I_B$, a igualdade anterior dá

$$I_B \circ (f \circ h) = g^{-1},$$

logo, $f \circ h = g^{-1}$. Agora, compondo essa última igualdade (de novo à esquerda) com f^{-1}, podemos escrever

$$f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Então, utilizando a associatividade da composição uma terceira vez, chegamos finalmente a $h = f^{-1} \circ g^{-1}$. Em resumo,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

4 Outras considerações

Existem funções que são iguais às suas inversas. Por exemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x$ é tal que $f \circ f = I_{\mathbb{R}}$. Esta função corresponde à reflexão da reta real em relação à origem.

Para outro exemplo, dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, denotamos por $\overline{z} = a - ib$ o **conjugado** de z. A função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $g(z) = \overline{z}$, satisfaz $g \circ g = I_{\mathbb{C}}$; assim, $g = g^{-1}$. A função g correponde à reflexão do plano em relação ao eixo das abscissas.

Funções com as exibidas acima, que são bijeções iguais à sua própria inversa, são chamadas de **involuções**. Outros exemplos de involuções são: a transposição de matrizes (que leva uma matriz A na matriz $A^\top$) e a inversão de um número real não nulo (que leva $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ em $1/x$).

Um exemplo mais elaborado é fornecido pela transformação geométrica do plano denominada *inversão em relação ao círculo de centro O e raio r* (não confundir com a inversão de números reais não nulos, definida no parágrafo anterior. Vendo o plano como o plano complexo e (sem perda de generalidade) que o ponto O corresponde ao número 0, essa transformação geométrica é a função

$$Inv : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,$$

dada por

$$Inv(z) = \frac{r^2}{\overline{z}}.$$

Assim, dado no plano um ponto P situado no exterior do círculo de centro O e raio r a função Inv o aplica num ponto $P' \neq O$ situado no interior desse círculo. Da mesma forma, ela leva cada ponto $P' \neq O$ situado no interior desse círculo a um ponto P situado no exterior do círculo. Os pontos sobre o círculo permanecem invariantes, ou seja, são levados pela função neles mesmos.

A função Inv é realmente uma involução, uma vez que

$$Inv(Inv(z)) = \frac{r^2}{\overline{Inv(z)}} = \frac{r^2}{\overline{r^2/\overline{z}}} = \overline{\overline{z}} = z.$$

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

Você pode explorar a discussão em torno da identidade $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ para fazer os alunos perceberem a diferença entre *suspeitar que uma certa identidade é válida* e *demonstrar* essa identidade. Também é um bom momento para enfatizar que a composição de funções não é comutativa, o que pode ser reforçado com exemplos.

No Exemplo 2, discutimos as restrições que devemos impor ao domínio e ao contradomínio de uma função quadrática, a fim que ela tenha inversa; além disso, sob tais restrições obtivemos a inversa. Você pode explorar esse exemplo com situações concretas, nos moldes do Exemplo 3, atribuindo valores aos coeficientes de f e avaliando, em cada caso, quais seriam os intervalos correspondentes.

Na Seção 4, apresentamos algumas funções que são iguais às suas inversas, as quais são chamadas de involuções. A inversão no plano foi apresentada de modo superficial, mas você pode aprofundar essa abordagem utilizando a sugestão de leitura complementar [3], por exemplo.

As sugestões de leitura complementar [1] e [2] trazem mais detalhes a respeito de funções inversas e podem ser consultadas para aprofundamento.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S. B. M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S. B. M., Rio de Janeiro, 2013.
3. Z. Stankova e T. Rike. *Uma década do Círculo Matemático de Berkeley, a Experiência Americana*, Editora S. B. M., Rio de Janeiro, 2018.