Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum - Parte 1

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

29 de março de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, apresentaremos exercícios variados envolvendo múltiplos e divisores de números naturais, máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc).

Exemplo 1 (Colégio Naval). *Marque a frase certa:*

(a) *Todo número terminado em* 30 *é divisível por* 3 *e por* 5.

(b) *Todo número cuja soma de algarismos é* 4 *ou múltiplo de* 4 *é divisível por* 4.

(c) *O produto de dois números é igual ao produto do mdc pelo mmc desses números.*

(d) *O mmc de dois números primos entre si é a semissoma desses números.*

(e) *Toda soma de dois quadrados perfeitos é um quadrado perfeito.*

Solução. A afirmação (a) é claramente falsa, pois, por exemplo, o número 130 termina em 30 e não é divisível por 3. Assim, não é verdade que todo número que termina em 30 (embora seja obrigatoriamente divisível por 5, pois termina em zero) seja divisível de 3.

A afirmação (b) também é falsa. Por exemplo, a soma dos algarismos de 22 é igual a 4, mas 22 não é divisível por 4.

A afirmação (c) é verdadeira. De fato, observando que $\mathrm{mdc}\,(m,n)$ é o produto das potências cujas bases são os fatores primos comuns a m e n e cujos expoentes são os menores possíveis (escolhidos dentre os expoentes que aparecem nas decomposições de m e n), e que $\mathrm{mmc}\,(m,n)$ é o produto das potências cujas bases são todos os fatores primos que aparecem nas decomposições de m e n e cujos expoentes são os maiores possíveis (novamente, escolhidos dentre os expoentes que aparecem nas decomposições de m e n), concluímos que $m \cdot n = \mathrm{mdc}\,(m,n) \cdot \mathrm{mmc}\,(m,n)$.

Sejam, por exemplo, $m = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^4$ e $n = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11$. Então, $\mathrm{mdc}\,(m,n) = 2^2 \cdot 3^3$ e $\mathrm{mmc}\,(m,n) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot$

11. Perceba que cada potência das decomposições de m e n aparece uma vez no $\operatorname{mdc}(m,n)$ e outra no $\operatorname{mmc}(m,n)$. Assim,

$$m \cdot n = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11 = \operatorname{mdc}(m,n) \cdot \operatorname{mmc}(m,n).$$

A afirmação (d) é falsa. De fato, o mmc de dois números primos entre si é igual ao produto desses números, que, por sua vez, é maior que sua semissoma se pelo menos um dos números for maior que 1.

Finalmente, a afirmação (e) também é falsa, pois, por exemplo, $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ e 13 não é um quadrado perfeito, ou seja, não existe um número natural a tal que $a^2 = 13$.

□

Exemplo 2 (Colégio Naval). *Qual deve ser o valor de m para que o mdc de $2^{m-1} \cdot 3^2 \cdot 5^m$ e 900 seja igual a 45?*

(a) 0.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

(e) 1.

Solução 1. Queremos que $\operatorname{mdc}(2^{m-1} \cdot 3^2 \cdot 5^m, 900) = 45$. Como 900 é par mas 45 é ímpar, o número $2^{m-1} \cdot 3^2 \cdot 5^m$ não pode ser par. (Do contrário, ele e 900 teriam pelo menos um fator 2, e o mesmo deveria acontecer com o mdc, o que não é o caso.) Assim, $2^{m-1} = 1$ e, daí, $m - 1 = 0$, isto é, $m = 1$.

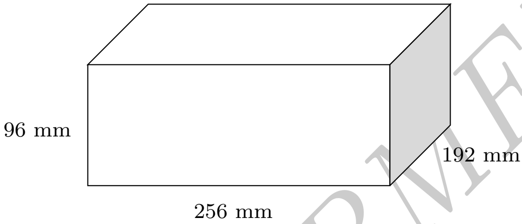
Assim, a alternativa correta é a letra (e). □

Solução 2. Decompondo 900 e 45 em fatores primos, obtemos $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ e $45 = 3^2 \cdot 5$.

Denote $A = 2^{m-1} \cdot 3^2 \cdot 5^m$. Como o mdc de A e 900 é o produto das potências cujas bases são fatores comuns e cujos expoentes são os menores possíveis, o expoente de 2^{m-1} em

A deve ser igual a 0 (pois o mdc 45 não tem fatores 2) e o expoente de 5^m em A deve ser igual a 1 (pois o mdc 45 só tem um fator 5). Logo, obtemos $m = 1$. $\square$

Exemplo 3 (Colégio Naval - Adaptada). *Um pedaço de doce de leite tem a forma de um paralelepípedo, com seis faces retangulares, como indica a figura abaixo. O doce deve ser dividido totalmente em cubos iguais, cada um com x mm de aresta. O maior valor inteiro de x é:*



(*a*) 16.

(*b*) 18.

(*c*) 24.

(*d*) 30.

(*e*) 32.

Solução. Como o pedaço deve ser dividido totalmente em cubos iguais, a aresta x de cada cubo, em mm, deve ser um divisor comum de 96, 192 e 256. Logo, o maior valor inteiro de x é $\text{mdc}(96,192,256)$. Como $192 = 2 \cdot 96$, temos que $\text{mdc}(96,192,256) = \text{mdc}(96,256)$. Calculando $\text{mdc}(96,256)$ pelo método das divisões sucessivas, obtemos
Assim, $x = \text{mdc}(96,192,256) = 32$. A alternativa correta é a letra (e).

$\square$

	2	1	2
256	96	64	32
64	32	0	

Exemplo 4 (Colégio Naval - Adaptada). *O* mmc *de dois números é* 300 *e o* mdc *desses números é* 6. *O número natural que representa o maior quociente possível entre esses dois números:*

(*a*) *Tem* 4 *divisores naturais.*

(*b*) *É um número primo.*

(*c*) *Tem* 6 *divisores naturais.*

(*d*) *É múltiplo de* 11.

(*e*) *Pode ser* 2.

Solução. Temos que $6 = 2 \cdot 3$ e $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Assim, se dois números naturais a e b são tais que $\text{mdc}\,(a,b) = 6$ e $\text{mmc}\,(a,b) = 300$, então podemos escrever $a = 2^x \cdot 3 \cdot 5^y$ e $b = 2^p \cdot 3 \cdot 5^q$, em que $\{x,p\} = \{1,2\}$ e $\{y,q\} = \{0,2\}$. Admitindo, sem perda de generalidade, que $a > b$, procuramos o maior valor para

$$\frac{a}{b} = \frac{2^x \cdot \cancel{3} \cdot 5^y}{2^p \cdot \cancel{3} \cdot 5^q}.$$

Uma vez que $\{x,p\} = \{1,2\}$, a fim de maximizar a fração $\frac{a}{b}$ devemos tomar $x = 2$, $p = 1$. Da mesma forma, tendo em vista que $\{y,q\} = \{0,2\}$, a fim de maximizar a fração $\frac{a}{b}$ devemos tomar $y = 2$, $q = 0$. Assim

$$\frac{a}{b} = \frac{2^2 \cdot 5^2}{2} = 2^1 \cdot 5^2.$$

Agora, veja que $2^1 \cdot 5^2$ possui $(1+1) \cdot (2+1) = 2 \cdot 3 = 6$ divisores naturais. Desse modo, a alternativa correta é a letra (c). $\square$

Exemplo 5. *Vamos supor que precisamos remeter duas encomendas de sabonetes para dois compradores diferentes. Um pediu* 420 *sabonetes e outro* 480 *sabonetes. Entretanto, queremos acondicionar os sabonetes em embalagens que sirvam para atender a estes dois pedidos, já que vamos enviar uma certa quantidade de embalagens para um comprador e uma outra quantidade de embalagens para o outro comprador. Quantos sabonetes devem caber em cada uma destas embalagens para que possamos atender as duas encomendas utilizando a menor quantidade possível de embalagens?*

Solução. Para que seja utilizada a menor quantidade possível de embalagens, a quantidade de sabonetes por embalagem deve ser a maior possível. Como as embalagens devem ter a mesma quantidade de sabonetes nas duas encomendas, o número de sabonetes por embalagem deve ser igual a mdc (420,480).

Calculando esse mdc pelo método das divisões sucessivas, obtemos

	1	7
480	420	60
60	0	

Assim, para que a quantidade de embalagens seja a menor possível, cada embalagem deve conter 60 sabonetes. □

Exemplo 6. *Um terreno retangular, de* $105m \times 165m$*, será cercado com arame farpado fixado em estacas igualmente espaçadas. Se existe uma estaca em cada vértice do terreno, qual é o número mínimo de estacas a serem utilizadas?*

Solução. Observe que o espaço entre duas estacas consecutivas deve ser um divisor comum a 105 e 165. Para que seja utilizada uma quantidade mínima de estacas, o espaço entre duas estacas consecutivas deve ser o maior possível.

Desse modo, o espaço entre duas estacas deve ser igual a $\operatorname{mdc}(105{,}165)$.

Calculando esse mdc utilizando as fatorações $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ e $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$, obtemos $\operatorname{mdc}(105{,}165) = 15$.

Por fim, levando em conta os quatro lados do terreno, concluímos que o número mínimo de estacas a serem utilizadas é

$$2\left(\frac{105}{15} + \frac{165}{15}\right) = 2(7 + 11) = 2 \cdot 18 = 36.$$

$\square$

Exemplo 7. *Melquisedeque está assando cookies para colocar em pacotes e vender para complementar a sua renda mensal. Ele fez 96 cookies de gotas de chocolate e 60 cookies de morango. Melquisedeque quer fazer pacotes iguais, com as mesmas quantidades de cookies de gotas de chocolate e de cookies de morango em cada pacote, utilizando todos os cookies que preparou. Qual é o maior número de pacotes iguais que Melquisedeque pode fazer?*

Solução. Veja que a quantidade de pacotes deve ser um divisor comum de 96 e 60, pois quantidades iguais de cookies de gotas de chocolate e de cookies de morango devem ser colocadas devem ser colocadas em cada pacote e Melquisedeque deseja utilizar todos os cookies que preparou, ou seja, não deve sobre nenhum cookie. Além disso, a quantidade de pacotes deve ser a maior possível. Desse modo, essa quantidade deve igual a $\operatorname{mdc}(96{,}60)$. Utilizando o método das divisões sucessivas, obtemos:

	1	1	1	2
96	60	36	24	12
36	24	12	0	

Portanto, Melquisedeque pode fazer, no máximo, **12 pacotes de cookies**, cumprindo as condições exigidas no problema. $\square$

Exemplo 8 (CMRJ). *Em um depósito do Governo Federal, encontram-se estocados* 6750 *sacos de feijão,* 5400 *sacos de arroz e* 4950 *sacos de milho, cada saco pesando* 60 *quilogramas. O governo ordena o esvaziamento do depósito e contrata carretas para efetuar o transporte dos alimentos. As carretas, cada uma conduzindo um só tipo de produto, devem ser carregadas com um mesmo número de sacos, sendo esse o maior possível; no entanto, nenhuma carreta deve ultrapassar* 10 *toneladas de carga. Quantas carretas serão necessárias?*

(a) 38 *carretas.*

(b) 76 *carretas.*

(c) 80 *carretas.*

(d) 114 *carretas.*

(e) 120 *carretas.*

Solução. Se não houvesse o limite de 10 toneladas de carga, o número de sacos transportados por cada carreta, que deve ser o maior possível, seria igual a $\text{mdc}\,(6750, 5400, 4950)$.

No entanto, como há esse limite (mas cada carreta ainda deve levar uma mesma quantidade de sacos), o número de sacos transportados em cada carreta deve ser o maior divisor de $\text{mdc}\,(6750, 5400, 4950)$, com a condição de que o peso total dos sacos não ultrapasse 10 toneladas.

Calculando $\text{mdc}\,(6750, 5400, 4950)$, obtemos:

	1	4
6750	5400	1350
1350	0	

	3	1	2
4950	1350	900	450
900	450	0	

Entretanto, 450 sacos pesam, ao todo,

$$450 \times 60 = 27000 \text{ quilogramas} = 27 \text{ toneladas},$$

ultrapassando a carga máxima permitida por carreta, que é de 10 toneladas. O segundo maior divisor de 450 é 225, mas

$$225 \times 60 = 13500 \text{ quilogramas} = 13{,}5 \text{ toneladas},$$

ainda ultrapassando a carga máxima por carreta.

Exceto por 450 e 225, o maior divisor de 450 é 150. Nesse caso, cada carreta transportaria

$$150 \times 60 = 9000 \text{ quilogramas} = 9 \text{ toneladas},$$

que está dentro do limite de carga. Desse modo, cada carreta deve transportar 150 sacos. Como há um total de

$$6750 + 5400 + 4950 = 17100 \text{ sacos},$$

serão necessárias

$$17100 \div 150 = \textbf{114 carretas}$$

para esvaziar o depósito. Portanto, a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 9 (CMPA). *Uma indústria de tecidos fabrica retalhos em partes de mesmo comprimento. Após realizarem os cortes necessários, verificou-se que as três peças restantes tinham as seguintes medidas:* 182 *centímetros,* 273 *centímetros e* 364 *centímetros. O fiscal de produção, ao ser informado desse erro, deu ordem para que um funcionário cortasse essas três peças em partes iguais e de maior comprimento possível. Sabendo que o funcionário cumpriu corretamente a ordem dada, pode-se afirmar que ele ficou com:*

(*a*) 9 *partes de* 91 *centímetros cada.*

(*b*) 7 *partes de* 91 *centímetros cada.*

(*c*) 10 *partes de* 81 *centímetros cada.*

(*d*) 18 *partes de* 45 *centímetros cada.*

(*e*) 21 *partes de* 45 *centímetros cada.*

Solução. Como as peças devem ser cortadas em partes iguais e de maior comprimento possível, o comprimento de cada uma dessas partes, em centímetros, deve ser igual a mdc (182,273,364).

Como $364 = 2 \cdot 182$, temos que

$$\text{mdc}\,(182{,}273{,}364) = \text{mdc}\,(182{,}273).$$

Utilizando uma vez mais o método das divisões sucessivas, obtemos

	1	2
273	182	91
91	0	

Portanto, as peças devem ser divididas em partes de 91 centímetros de comprimento cada, de sorte que o total de partes será

$$\frac{182}{91} + \frac{273}{91} + \frac{364}{91} = 2 + 3 + 4 = 9.$$

Assim, a alternativa correta é a letra (a). □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

É recomendável fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos abordados, antes de resolver cada problema. Em particular, é importante que os alunos conheçam os métodos utilizados para calcular mdc e mmc. Em particular, ao apresentar o Exemplo 1, é recomendável que sejam feitos alguns outros exemplos numéricos para que os alunos compreendam a fórmula $m \cdot n = \operatorname{mdc}(m,n) \cdot \operatorname{mmc}(m,n)$.