Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas

Exercícios - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Junho de 2024

Portal da Matemática
OBMEP

Seguimos apresentando exemplos mais elaborados e que envolvem a noção de continuidade. Aqui, exploraremos questões correlatas ao conceito de densidade. A terceira parte do material, por sua vez, orbitará em torno do teorema dos valores extremos.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Sejam I um intervalo e $X \subset I$ um subconjunto denso em I* [1]. *Se $f,g : I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas coincidindo sobre X, ou seja, tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, mostre que $f = g$.*

Solução. Dados $a \in I$ e uma margem de erro arbitrária $\varepsilon > 0$, basta mostrar que $|f(a) - g(a)| < \varepsilon$. Com efeito, se assim for, fazemos $\varepsilon \to 0^+$ na desigualdade anterior para obter $|f(a) - g(a)| \leq 0$, de onde segue que $f(a) = g(a)$.

Por definição de continuidade, existem $\delta_1,\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in I, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$$

e

$$x \in I, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon/2.$$

Se $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, o fato de X ser denso em I garante que algum ponto $x \in X$ dista de a menos que δ, ou seja, $|x-a| < \delta$. Logo, de acordo com as implicações acima, $|f(a)-f(x)| < \varepsilon/2$ e $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$. Como, por hipótese, $f(x) = g(x)$, vem que

$$\begin{aligned}
|f(a) - g(a)| &= |(f(a) - f(x)) + (g(x) - g(a))| \\
&\leq |f(a) - f(x)| + |g(x) - g(a)| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,
\end{aligned}$$

conforme desejado. □

Uma aplicação simples do exemplo anterior é a seguinte: *se f e g são funções reais de uma variável real, contínuas e que*

[1] Veja a discussão que precede o exemplo 6 da aula anterior.

coincidem sobre $\mathbb{Q}$ (o conjunto dos números racionais), então $f = g$. Com efeito, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (confira a proposição 2 da 1ª aula desse módulo).

Essa observação permite escrever uma (outra) demonstração [2] para o resultado abaixo.

Teorema 2. *As únicas funções reais de uma variável real, contínuas e aditivas, são as funções lineares.*

Vale recordar que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *aditiva* se preserva adição, ou seja,

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Prova do Teorema 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a equação funcional (1). Observe que

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0),$$

de modo que $f(0) = 0$. Logo, f deve ser ímpar, pois

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0,$$

isto é, $f(-x) = -f(x)$. Por isso, se estabelecermos a relação

$$f(nx) = nf(x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

seguirá que

$$f(nx) = nf(x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Realmente, se n for um inteiro negativo, então $-n$ será natural, de sorte que, por (2),

$$-f(nx) = f((-n)x) = (-n)f(x) = -nf(x).$$

Portanto, $f(nx) = nf(x)$ e isso demonstra (3).

[2] Compare com a solução apresentada do exemplo 20 na aula *Continuidades Laterais e em um Intervalo*.

Para provar (2), utilizaremos indução matemática. O caso $n = 1$ é imediato. Agora, se a relação (2) valer para um certo natural n e cada número real x, teremos, de acordo com (1),

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx+x) = f(nx) + f(x) \\ &= nf(x) + f(x) = (n+1)f(x), \end{aligned}$$

encerrando a indução.

`Afirmação`: se $a = f(1)$, então $f(r) = ar$ para cada número racional r.

De fato, se $r = m/n$, a equação funcional (3) dá

$$\begin{aligned} nf\left(\frac{m}{n}\right) &= f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = f(m) \\ &= f(m \cdot 1) = mf(1) = ma. \end{aligned}$$

Daí, segue a igualdade $nf(r) = ma$, ou ainda, $f(r) = ar$.

Graças à discussão acima, vemos que f e a função linear $g(x) = ax$ coincidem sobre $\mathbb{Q}$. Conforme observamos anteriormente, isso implica $f = g$, ou seja, f é linear.

Por fim, uma vez que todas as funções lineares (são contínuas e) satisfazem (1), a demonstração está encerrada.

$\square$

Exemplo 3 (IMC - 2008, Problema 1). *Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para as quais $f(y) - f(x)$ é racional sempre que x,y forem números reais tais que $y - x$ é racional.*

Solução. Trata-se da classe das funções afins da forma $f(x) = ax + b$, em que $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Por um lado, cada uma dessas funções satisfaz a condição no enunciado, pois $f(y) - f(x) = a(y - x)$ é racional se a e $y - x$ o forem.

Reciprocamente, fixado um racional r, a função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x + r) - f(x)$, só pode assumir valores racionais. De fato, basta fazer $y = x + r$

no enunciado e notar que $g(x) = f(y) - f(x)$, ao passo que $y - x = r$ é racional.

Denote por $\operatorname{Im} g$ a imagem da função g. Graças ao TVI e à discussão acima, $\operatorname{Im} g$ é um intervalo que não contém números irracionais. Então, a densidade do conjunto dos números irracionais na reta [3] obriga $\operatorname{Im} g$ a ser um intervalo degenerado, ou seja, $\operatorname{Im} g = \{s\}$, para algum racional s. Logo, g é constante e, em particular,

$$f(x + r) - f(x) = g(x) = g(0) = f(r) - f(0), \tag{4}$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$.

Fixado um número real x, defina $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(y) = f(x + y) - f(0).$$

Então, h é contínua e a relação (4) pode ser escrita como

$$(f(x + r) - f(0)) - (f(x) - f(0)) = f(r) - f(0)$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$, ou seja,

$$h(r) - h(0) = f(r) - f(0), \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}.$$

Pela densidade de $\mathbb{Q}$ na reta, o exemplo 1 implica

$$h(y) - h(0) = f(y) - f(0)$$

para todo y real, ou seja,

$$f(x + y) - f(0) = (f(x) - f(0)) + (f(y) - f(0)), \tag{5}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Definindo $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\phi(x) = f(x) - f(0)$, obtemos uma função contínua. Por outro lado, a equação funcional (5) equivale à aditividade de ϕ, de onde se conclui, pelo exemplo anterior, que tal função é linear.

Por fim, escrevendo $\phi(x) = ax$, segue a igualdade $f(x) = ax + b$, com $b = f(0)$. Note que $a = f(1) - f(0)$ é racional, pela condição imposta sobre f. $\square$

[3] Confira a discussão anterior ao exemplo 6 da 1ª parte dessa aula.

O próximo exemplo traz uma aplicação mais elaborada do exemplo 1. Antes, precisaremos de um resultado auxiliar.

Lema 4. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua e $X \subset I$ é denso em I, então $f(X)$ é denso em $f(I)$.*

Prova. Com efeito, a continuidade de f garante que, dados $f(a) \in f(I)$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Como X é denso em I, existe $x \in X$ tal que $|x - a| < \delta$, de sorte que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Sendo $f(x)$ um ponto de $f(X)$, o resultado está demonstrado. $\square$

Exemplo 5. *Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo $f(2x) = 2f(x)$ e $f(3x) = 3f(x)$ para todo real positivo x. Mostre que existe uma constante a tal que $f(x) = ax$ para todo $x > 0$.*

Solução. Precisamos estabelecer algumas afirmações preliminares.

`Afirmação 1.` $f(2^n x) = 2^n f(x)$ e $f(3^n x) = 3^n f(x)$ para todos $x \in (0, +\infty)$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Basta provar a afirmação referente às potências de 2, já que a outra, referente às potências de 3, se demonstra da mesma forma.

Primeiramente, fixado $x > 0$, vejamos por indução que $f(2^n x) = 2^n f(x)$ para todo n natural. O caso $n = 1$ compõe a hipótese. Supondo $f(2^n x) = 2^n f(x)$ para algum n natural, vem que

$$f(2^{n+1}x) = f(2(2^n x)) = 2f(2^n x) = 2(2^n f(x)) = 2^{n+1} f(x),$$

encerrando a indução.

Para o que falta, note que

$$f(x) = f\left(2^n \cdot \frac{x}{2^n}\right) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

de sorte que $f(2^{-n}x) = 2^{-n}f(x)$ para todo n natural, o que estabelece a igualdade $f(2^n x) = 2^n f(x)$ para todo inteiro não nulo n. Como essa igualdade é obviamente verdadeira para $n = 0$, nada mais há a fazer.

Seja $a := f(1)$.

`Afirmação 2.` $f(2^m 3^n) = a(2^m 3^n)$ para quaisquer inteiros m,n.

Basta fazer $t = 3^n$ em $f(2^m t) = 2^m f(t)$ e utilizar a segunda relação na afirmação 1 com $x = 1$:

$$\begin{aligned} f(2^m 3^n) &= 2^m f(3^n) \\ &= 2^m 3^n f(1) \\ &= a(2^m 3^n). \end{aligned}$$

`Afirmação 3.` $\{2^m 3^n \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $(0, +\infty)$.

Com efeito, começamos notando que $\log_2 3$ é irracional, o que segue do exemplo 9 da aula *Resolução de Exercícios* no módulo de Função Logarítmica.

Assim, $X = \{m + n\log_2 3 \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ é denso na reta pelo lema de Kronecker (exemplo 7 da 1ª parte dessa aula). Tomando $f(x) = 2^x$ no lema 4, segue que

$$f(X) = \{2^m 3^n \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$$

é denso em $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

Finalmente, sendo $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = ax$, a afirmação 2 pode ser reescrita como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Pela afirmação 3 e exemplo 1, segue a igualdade $f = g$, ou seja, $f(x) = ax$ para todo $x > 0$.

□

Exemplo 6 (Leningrado - 1990). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que, para todo real x, tenhamos $f(x + f(x)) = f(x)$. Prove que f é constante.*

Solução. Se f for identicamente nula, não há o que fazer. Caso contrário, seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função contínua definida por

$g(x) = x + f(x)$. Assim, a equação funcional satisfeita por f pode ser reescrita como $f(g(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $f \circ g = f$. Daí, segue facilmente que

$$f \circ g^{(n)} = f \tag{6}$$

para todo n natural, sendo $g^{(n)}$ a composição $g \circ \ldots \circ g$ com n fatores.

Para o que segue, afirmamos que $g^{(n)} = \mathrm{Id} + n \cdot f$, isto é,

$$g^{(n)}(x) = x + nf(x), \tag{7}$$

para todo x real.

A relação acima pode ser provada por indução: o caso $n = 1$ é a própria definição de g. Supondo que $g^{(n)} = \mathrm{Id} + n \cdot f$, para um certo n natural, temos

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= g^{(n)}(g(x)) \\ &= g(x) + nf(g(x)) \\ &= (x + f(x)) + nf(x) \\ &= x + (n+1)f(x) \end{aligned}$$

para cada x real, estabelecendo o passo indutivo.

`Afirmação 1`. g é crescente.

De fato, g é injetiva, pois

$$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(g(x)) = f(g(y)) = f(y),$$

de forma que $x = g(x) - f(x) = g(y) - f(y) = y$. Daí, pelo exemplo 15 da aula anterior, g é estritamente monótona.

Escolhendo x tal que $h = f(x) \neq 0$ (o que é possível, já que estamos supondo $f \not\equiv 0$), teremos $x + h = g(x)$ e, daí,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{g(g(x)) - g(x)}{f(x)} = \frac{\cancel{f(x)}}{\cancel{f(x)}} = 1 > 0,$$

de acordo com (7) (para $n = 2$). Logo, g possui uma taxa de variação média positiva, o que, na presença da hipótese de que g é estritamente monótona, implica a afirmação 1.

`Afirmação 2`. f é monótona não decrescente.

Com efeito, como $g^{(n)}$ é crescente (por que?), temos $g^{(n)}(x) < g^{(n)}(y)$ se $x < y$. Nesse caso, a equação (7) permite escrever

$$f(y) - f(x) + \frac{y-x}{n} = \frac{g^{(n)}(y) - g^{(n)}(x)}{n} > 0.$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade anterior, obtemos, pela permanência do sinal, $f(y) - f(x) \geq 0$, como desejado.

Graças à afirmação 2, existem

$$L = \lim_{x \to -\infty} f(x) \tag{8}$$

e

$$M = \lim_{x \to +\infty} f(x). \tag{9}$$

`Afirmação 3`. $\operatorname{Im} f$, o conjunto imagem de f, é finito.

Realmente, basta mostrar que $\operatorname{Im} f \subset \{L,0,M\}$. Ora, se $f(x) \neq 0$, temos $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$. No 1º caso, $g^{(n)}(x) = x + nf(x) \to -\infty$ quando $n \to +\infty$, de sorte que, por (6) e (8),

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(g^{(n)}(x)) = L.$$

Do mesmo modo, a igualdade (9) implica $f(x) = M$, caso tenhamos $f(x) > 0$. Portanto, ou $f(x) = L$ ou $f(x) = 0$ ou $f(x) = M$, como queríamos.

Para encerrar, a continuidade de f garante que sua imagem é um intervalo, o qual é finito pela afirmação 3. Então, Im f é um intervalo degenerado, ou seja, Im f consiste de apenas um ponto. Assim, f é constante. □

Exemplo 7 (OBMU/2007, 2ª fase, Problema 1). *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, com*

a,b,$c \in \mathbb{R}$ e $ac < 0$. Prove que, para todo n inteiro positivo, a equação

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots)) = 0$$

tem pelo menos uma solução real.

Solução. Dado n natural, seja $f^{(n)} = f \circ \ldots \circ f$, a composição de n fatores iguais a f. Provaremos, por indução em n, que $f^{(n)}$ admite alguma raiz real.

Para simplificar o argumento, convém introduzir o polinômio $g(x) = cx^2 + bx + a$, de forma que, para $x \neq 0$, tem-se

$$f(x) = ax^2 + bx + c = x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) = x^2 g(1/x).$$

Assim, se $f^{(n)}(x) \neq 0$, temos

$$f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x)) = [f^{(n)}(x)]^2 g\left(\frac{1}{f^{(n)}(x)} \right).$$

Como $f^{(n)}$ é um polinômio de grau positivo [4], tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} |f^{(n)}(x)| = +\infty,$$

de modo que $g\left(\frac{1}{f^{(n)}(x)}\right) \to g(0) = a$ quando $x \to +\infty$. Dessa forma,

$$\lim_{x \to +\infty} f^{(n+1)}(x) = \lim_{x \to +\infty} [f^{(n)}(x)]^2 g\left(\frac{1}{f^{(n)}(x)} \right) = +\infty \cdot a,$$

o que resulta em $+\infty$ ou $-\infty$, conforme a seja positivo ou negativo.

Agora, vamos à indução. Para $n = 1$, o polinômio quadrático $f^{(1)} = f$ admite duas raízes reais distintas, pois $b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$, por hipótese. Suponhamos, então, que $f^{(n)}$ admita alguma raiz real, digamos x_0. Então,

$$f^{(n+1)}(x_0) = f(f^{(n)}(x_0)) = f(0) = c.$$

[4] Igual a 2^n, para ser preciso.

Se $c < 0$ (resp. $c > 0$), então $a > 0$ (resp. $a < 0$) e a discussão que precede o parágrafo anterior mostra que $f^{(n+1)}(x) > 0$ (resp. $f^{(n+1)}(x) < 0$) para todo x suficientemente grande. Portanto, $f^{(n+1)}$ assume valores negativos e positivos, de modo que 0 é um valor intermediário para essa função. Logo, o TVI assegura a existência de alguma raiz real de $f^{(n+1)}$. A indução está, pois, completa. $\square$

Dicas para o Professor

Como sabemos [5], o teorema 2 ainda é válido com a hipótese de continuidade substituída por monotonicidade. Além disso, é possível escrever uma demonstração para essa versão nas mesmas linhas da prova apresentada no texto. Você poderá encontrar os detalhes do argumento no 5º capítulo da referência [2] [6].

Havendo tempo disponível, faça os alunos pensarem por cerca de dez minutos em cada exemplo, antes de enveredar pela explicação da solução/demonstração do mesmo. A depender do progresso da turma, esse momento da aula pode ser intercalado por pequenas sugestões, as quais fomentem a percepção do caminho correto a seguir. Assim fazendo, duas ou três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. E. L. Lima. et al. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 1*. 11ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[5]Vide observação 13 da aula *Continuidade em um Ponto - Parte II.*
[6]Confira o *Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*