Material Teórico - Módulo Equações Algébricas-Propriedades das Raízes

Relações de Girard

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de novembro de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Nesta aula analisamos relações importantes entre os coeficientes de um polinômio e expressões algébricas que envolvem suas raízes, tais como a soma e o produto das raízes. É bastante conhecido que em uma equação de segundo grau, digamos $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \neq 0$, a soma das raízes é $-b/a$ e o produto das raízes é c/a. As chamadas relações de Girard generalizam esses resultados para polinômios de qualquer grau além de tratar de outras expressões.

2 Equações de segundo grau

Começamos relembrando as demonstrações para as fórmulas mencionadas acima.

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação de segundo grau $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Seja $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Pelo teorema da decomposição, temos que

$$p(x) = a_2(x - r_1)(x - r_2).$$

Logo,

$$a_2(x - r_1)(x - r_2) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Dividindo ambos os lados por a_2 (o que pode ser feito pois $a_2 \neq 0$), temos

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}.$$

Agora, aplicando a propriedade distributiva ao lado esquerdo, temos

$$x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2 = x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}.$$

Logo,

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 = x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}.$$

Como esta é uma igualdade entre polinômios, cada coeficiente do lado esquerdo é igual ao seu correspondente do lado direito. Logo,

$$r_1 + r_2 = \frac{-a_1}{a_2} \quad \text{e} \quad r_1 r_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Observação 1. *Quando a equação possui uma raiz dupla temos que $r_1 = r_2$ e obtemos $2r_1 = \frac{-a_1}{a_2}$. Em geral, para que as fórmulas acima e as das seções seguintes sejam válidas, quando dizemos "soma das raízes", precisamos contabilizar raízes múltiplas tantas vezes quanto forem suas multiplicidades. Em especial, quando há raízes múltiplas* não *estamos nos referindo apenas à soma de raízes distintas. O análogo se aplica ao produto.*

3 Equações de terceiro grau

Vamos imitar a demonstrações acima para polinômios/equações de terceiro grau. Dessa vez, seja

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e sejam r_1, r_2, r_3 as raízes de $p(x) = 0$. Temos que

$$a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Dividindo por a_3, obtemos

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3}.$$

Por outro lado, desenvolvendo o lado esquerdo da equação acima, temos

$$\begin{aligned}(x-r_1)(x - r_2)(x - r_3) &= (x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2)(x - r_3) \\ &= x^3 - ((r_1 + r_2) + r_3)x^2 + (r_1r_2 + (r_1 + r_2)r_3)x - r_1r_2r_3 \\ &= x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes do polinômio acima com os da expressão original para $p(x)$, temos que

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= \frac{-a_2}{a_3}, \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 &= \frac{a_1}{a_3}, \\ r_1r_2r_3 &= \frac{-a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

As três relações acima são as relações de Girard para polinômios de grau 3. Note que, além da soma e do produto das três raízes, temos uma relação intermediária que é a soma dos produtos de 2 das raízes.

4 Relações de Girard em polinômios quaisquer

Para generalizar o que fizemos acima para polinômios de maior grau precisamos definir o conceito de polinômio simétrico elementos. Fixado um inteiro positivo n, para $1 \leq k \leq n$, o k-ésimo polinômio simétrico elementar sobre as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é obtido da seguinte forma: para cada escolha de k das n variáveis calcule seu produto, em seguida, faça a soma de cada um dos produtos obtidos. Vamos denotar o resultado por $s_k(x_1, \ldots, x_n)$.

Por exemplo, para $n = 4$ e $k = 2$, temos quatro variáveis, x_1, x_2, x_3, x_4, há seis maneiras de escolher duas delas, assim calculamos os produtos:

$$x_1x_2, \quad x_1x_3, \quad x_1x_4, \quad x_2x_3, \quad x_2x_4, \quad x_3x_4.$$

Então calculamos a soma:

$$s_2(x_1, \ldots, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Em palavras, dizemos que calculamos a soma dos produtos dois a dois de $x_1, \ldots, x_4$. Abaixo, temos todos os polinômios elementares de grau 4:

$$
\begin{aligned}
&s_0(x_1,\ldots,x_4) = 1,\\
&s_1(x_1,\ldots,x_4) = x_1+x_2+x_3+x_4,\\
&s_2(x_1,\ldots,x_4) = x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4,\\
&s_3(x_1,\ldots,x_4) = x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4\\
&s_4(x_1,\ldots,x_4) = x_1x_2x_3x_4.
\end{aligned}
$$

Em geral, para $1 \le k \le n$, em símbolos, escrevemos:

$$s_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}.$$

Para $k=0$, convenciona-se que:

$$s_0(x_1,\ldots,x_n) = 1.$$

Teorema 2 (Relações de Girard). *Seja*

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

um polinômio não constante com raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$. *Então, para cada* k *com* $1 \le k \le n$ *temos:*

$$s_k(r_1,\ldots,r_n) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Demonstração. Para simplificar a notação, nesta provas vamos escrever simplesmente s_k para denotar $s_k(r_1,\ldots,r_n)$. Pelo teorema da decomposição, obtemos:

$$p(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n).$$

Aplicando a propriedade distributiva à expressão acima obtemos

$$p(x) = a_nx^n - a_ns_1x^{n-1} + a_ns_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^na_ns_1.$$

Igualando os coeficiente desta expressão com os do enunciado obtemos o resultado desejado. $\square$

5 Exercícios Resolvidos

Exemplo 3. *Sejam r, s e t raízes da equação*

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 5 = 0.$$

Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões.

(a) $r + s + t$.

(b) $rs + rt + st$.

(c) rst.

(d) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$.

(e) $\frac{1}{rs} + \frac{1}{rt} + \frac{1}{st}$.

Solução. Uma das vantagens das Relações de Girard é que não precisamos calcular cada uma das raízes individualmente para conseguir calcular as expressões desejadas. Calcular cada raiz seria algo trabalhoso neste exemplo, já que temos uma equação de terceiro grau.

Para os itens (a), (b) e (c), basta aplicar diretamente as Relações de Girard.

(a) A soma das raízes é $\frac{-4}{1} = 4$.

(b) A soma dos produtos 2 a 2 das raízes é: $\frac{6}{1} = 6$.

(c) O produto das raízes é: $\frac{-(-5)}{1} = 5$.

Para os demais itens, usaremos os valores calculados no itens anteriores.

(d) Temos que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{st + rt + rs}{rst} = \frac{6}{5}.$$

(e) Temos que

$$\frac{1}{rs} + \frac{1}{rt} + \frac{1}{st} = \frac{t + s + r}{rst} = \frac{4}{5}.$$

$\square$

Exemplo 4. *Resolva a equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$ sabendo que uma das raízes é igual à soma das outras duas.*

Solução. Sejam r_1, r_2, r_3 as raízes da equação do enunciado. Usando as relações de Girard temos que:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -(-8)/1 = 8, \tag{1}$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 19/1 = 19, \tag{2}$$

$$r_1r_2r_3 = -(-12)/1 = 12. \tag{3}$$

(Na verdade, precisaremos apenas da primeira e da última equação acima).

O enunciado nos diz que uma das raízes é a soma das outras duas. Suponha, sem perda da generalidade, que

$$r_1 = r_2 + r_3.$$

Substituindo isto na equação (1), temos:

$$r_1 + r_1 = 8 \implies r_1 = 4.$$

Isso também implica que $r_2 + r + 3 = 4$. E substituindo o valor de r_1 na terceira relação de Girard, obtemos:

$$r_2r_3 = 3.$$

Agora, sabemos que $r_2 + r + 3 = 4$ e $r_2r_3 = 3$. Ou seja, r_2, r_3 são raízes da equação de segundo grau $x^2 - 4x + 3$. Não é difícil perceber que eles são, em alguma ordem, iguais a 1 e 3.

Logo, as raízes da equação original são: 1, 3 e 4. $\square$

Exemplo 5. *Forme uma equação cujas raízes sejam 1, 1, $\frac{1}{2}$ e -1.*

Solução. Como a equação tem 4 raízes (contando suas multiplicidades), basta montar uma equação polinomial de grau 4. Faça

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Há vários polinômios que satisfazem o enunciado já que multiplicar todos os coeficientes por um mesmo valor não afeta as raízes. Vamos construir um em que $a_4 = 1$. Isso facilita os cálculos. Pelas relações de Girard temos:

A soma das raízes é:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

Logo, $-a_3 = \frac{3}{2}$. Daí, $a_3 = -\frac{3}{2}$.

A soma dos produtos dois a dois é:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = \\ & = 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} \\ & = \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $a_2 = \frac{-1}{2}$.

A somas dos produtos três a três é:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = \\ = \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $-a_1 = \frac{-3}{2}$, ou seja, $a_1 = \frac{3}{2}$.

Finalmente, o produto das raízes é:

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{-1}{2}.$$

Logo, $a_0 = -1/2$.

Com isso, uma equação que satisfaz o enunciado é:

$$x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0.$$

$\square$

Exemplo 6. *As raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ são os comprimentos dos lados de um triângulo. Calcule a área do mesmo.*

Solução. Sejam a, b e c as raízes de $f(x)$ e seja A a área do triângulo cujos lados tem medidas a, b e c. Vamos usar a fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo (veja a aula "Área de Figuras Planas: mais alguns Resultados" do Módulo "Áreas de Figuras Planas" do Nono Ano do EF). Ela nos diz que

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

em que $p = (a+b+c)/2$. Pelas relações de Girard,

$$p = \frac{1}{2}s_1\,(a,b,c) = \frac{1}{2}\frac{-(-7)}{1} = \frac{7}{2},$$

de maneira que

$$A^2 = \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}-a\right)\left(\frac{7}{2}-b\right)\left(\frac{7}{2}-c\right),$$

Lembrando que a, b, c são raízes de $f(x)$ e o coeficiente de x^3 em $f(x)$ é 1, a forma fatorada a forma fatorada de $f(x)$ é

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c).$$

Logo,

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}-a\right)\left(\frac{7}{2}-b\right)\left(\frac{7}{2}-c\right).$$

Por outro lado, usando a forma dos coeficientes

$$f(\frac{7}{2}) = \left(\frac{7}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{7}{2}\right) - 6 = \frac{1}{8}$$

Concluímos que

$$A^2 = \frac{7}{2}\cdot f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{7}{16}.$$

Logo, a área do triângulo é

$$A = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

□

Exemplo 7. *Sejam m, n e k as raízes de uma equação da forma $x^3 + ax + b = 0$, onde a e b são números complexos quaisquer. Sabendo que m, n e k são racionais, mostre que as raízes da equação de segundo grau $mx^2 + nx + k = 0$ também são racionais.*

Solução. Por Girard, como m, n e k são raízes de $x^3 + ax + b = 0$, temos que $m + n + k = 0$. Seja $f(x) = mx^2 + nx + k$. Logo, $f(1) = m + n + k = 0$. Assim, o número 1 é uma das raízes da equação de segundo grau $mx^2 + nx + k = 0$.

Resta provar que a outra raiz também é racional. Isso é imediato uma vez que o produto das raízes de $mx^2+nx+k = 0$ é k/m. Como uma das raízes é o número 1 a outra raiz é o próprio k/m. E como k e m são racionais, temos que k/m também é. $\square$

Exemplo 8. *Sejam a, b e c números reais não nulos rais que $a + b + c = 0$. Mostre que*

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right). \qquad (4)$$

Solução. Cuidado: nesta questão o objetivo é argumentar porque a equação (4) é obrigatoriamente satisfeita para todos os reais que satisfaçam $a + b + c = 0$. Não queremos resolver tal equação. Assim, tudo que podemos supor inicialmente é que $a + b + c = 0$.

Seja $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Pelas relações de Girard, a condição $a + b + c = 0$ nos garante que $f(x) = x^3 + sx - t$, onde $s = ab + ac + bc$ e $t = abc$.

Mas como $f(a) = 0$, temos que $a^3 = -sa + t$. Analogamente, $b^3 = -sb + t$ e $c^3 = -sc + t$. Somando, membro a membro, essas três igualdade obtemos

$$a^3 + b^3 + c^3 = -s(a + b + c) + 3t = 3t.$$

Para calcular $a^5+b^5+c^5$, comece multiplicando as equações $a^3 = -sa + t$, $b^3 = -sb + t$ e $c^3 = -sc + t$ por a^2, b^2 e c^2 respectivamente. Obtemos $a^5 = -sa^3 + ta^2$, $b^5 = -sb^3 + tb^2$

e $c^5 = -sc^3 + tc^2$. E somando membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 &= -s(a^3 + b^3 + c^3) + t(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= -3st + t(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = -2s.$$

Logo,

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5st.$$

Finalmente, concluímos que

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = -st = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right).$$

□

Dicas para o Professor

O assunto deste material pode ser abordado em um encontro de 50 minutos, com a disponibilidade de tempo adicional para exercícios caso seja necessário.

A referência [1] contém uma discussão relativamente completa e profunda sobre equações polinomiais e alguns exercícios deste material foram extraídos de lá. A referência [2] é uma agradável leitura, a qual contempla a história das tentativas de se resolver equações polinomiais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. I. Stewart. *Uma História da Simetria em Matemática*. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.