Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Leis dos Cossenos e dos Senos, Polígonos Regulares

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos - Parte 2

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 A Lei dos Senos

O objetivo desse material é demonstrar e exibir algumas aplicações do teorema 2, que é conhecido como a **Lei dos Senos**. Antes, contudo, assim como fizemos na primeira parte para o cosseno, precisamos estender a definição de seno a ângulos retos e obtusos. Para fazê-lo, note que se α é um ângulo obtuso, então:

$$\begin{aligned} 90^{\text{o}} < \alpha < 180^{\text{o}} &\iff -180^{\text{o}} < -\alpha < -90^{\text{o}} \\ &\iff 0^{\text{o}} < 180^{\text{o}} - \alpha < 90^{\text{o}}, \end{aligned}$$

ou seja, $180^{\text{o}} - \alpha$ é um ângulo agudo. Assim, para $90^{\text{o}} < \alpha < 180^{\text{o}}$, definimos o seno de α pondo

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180^{\text{o}} - \alpha).$$

Definimos, ainda, $\operatorname{sen} 90^{\text{o}} = 0$.

Exemplo 1. *Graças à definição acima, temos que*

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 120^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

As razões da extensão da definição de seno dada acima ficarão claras quando, nos módulos do primeiro ano do Ensino Médio, começarmos a estudar os conceitos de seno e o cosseno em situações mais gerais, i.e., no âmbito da *Trigonometria*.

Para o enunciado da Lei dos Senos, recorde que o *círculo circunscrito* a um triângulo é o único círculo que passa por seus vértices.

Teorema 2. *Seja ABC um triângulo cujos lados AB, AC e BC medem, respectivamente, c, b e a. Se R denota a medida do raio do círculo circunscrito a ABC, então:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R. \qquad (1)$$

Prova. Trataremos apenas o caso em que o triângulo ABC é acutângulo, pois os outros casos podem ser feitos de modo inteiramente análogo.

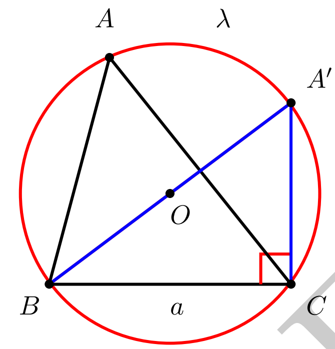
Sejam λ o círculo circunscrito a ABC e O o seu centro. Considere o ponto A' sobre λ, tal que $A'B$ é um diâmetro (veja a figura a seguir).

Note que $A' \neq C$ e $A' \neq A$, pois caso contrário ABC seria retângulo, já que um de seus lados seria um diâmetro de λ. Assim, temos que $A'BC$ é retângulo em C e, desse modo:

$$\operatorname{sen} \widehat{A'} = \frac{a}{2R} \Longrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A'}} = 2R.$$

Agora, veja que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, pois, sendo ângulos inscritos em λ subentendendo o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$, temos

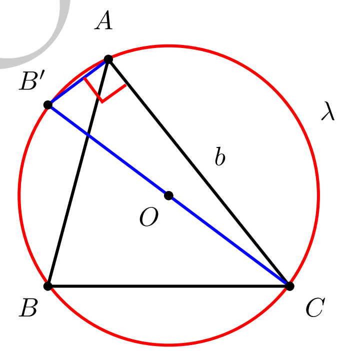
$$\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot B\widehat{O}C = \widehat{A'}.$$



Portanto, obtemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A'}} = 2R.$$

Argumentos análogos ao executado acima para o vértice A, desta feita com o vértice B ou o vértice C, fornecem as outras duas igualdades do enunciado. Por exemplo, considerando o ponto B' sobre λ tal que o segmento CB' é um diâmetro, obtemos o triângulo $B'AC$, retângulo em A e tal que $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (veja a figura abaixo). Então,



$$\operatorname{sen} \widehat{B'} = \frac{b}{2R} \Longrightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B'}} = 2R$$

e, daí,

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B'}} = 2R.$$

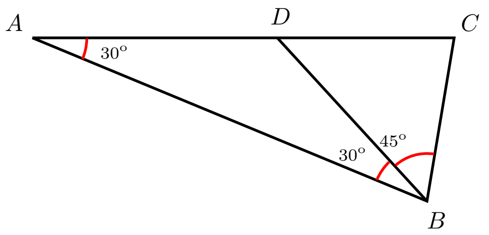
Da mesma forma, tomando o ponto C' sobre λ tal que AC' é um diâmetro e repetindo os argumentos anteriores (desenhe uma figura para esse caso e repasse os argumentos correspondentes), chegamos à igualdade

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R.$$

□

Antes de examinarmos algumas consequências importantes da Lei dos Senos, vejamos, em dois exemplos, como tal resultado pode ser aplicado.

Exemplo 3. *No triângulo da figura abaixo, temos que* $B\widehat{A}D = A\widehat{B}D = 30^o$, $C\widehat{B}D = 45^o$ *e* $\overline{AB} = 3 + \sqrt{3}$ *cm. Calcule a medida do segmento* CD.



Solução. Observe inicialmente que, como a soma dos ângulos de todo triângulo é 180°, temos

$$A\widehat{D}B = 180^o - 2 \cdot 30^o = 120^o$$

e, daí,

$$C\widehat{D}B = 180^o - A\widehat{D}B = 160^o - 120^o = 60^o.$$

Assim, aplicando a Lei dos senos ao triângulo ABD, juntamente com o resultado do Exemplo 1, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} 30^o} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} 120^o} &\Longrightarrow \frac{\overline{AD}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{3+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}\\ &\Longrightarrow \overline{AD} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\ &\Longrightarrow \overline{AD} = \frac{3+3\sqrt{3}}{3}\\ &\Longrightarrow \overline{AD} = \frac{\cancel{3}\,(1+\sqrt{3})}{\cancel{3}}\\ &\Longrightarrow \overline{AD} = 1+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Note, agora, que o triângulo ABC é isósceles, pois

$$A\widehat{B}C = 30^o + 45^o = 75^o$$

e (utilizando novamente a soma dos ângulos igual a 180°)

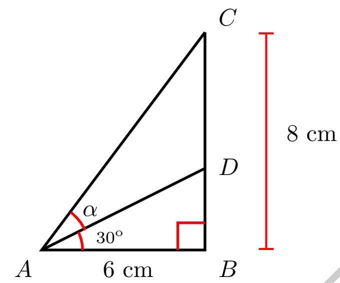
$$A\widehat{C}B = 180^o - (30^o + 75^o) = 180^o - 105^o = 75^o.$$

Portando, fazendo $\overline{CD} = x$ utilizando o fato que ABC isósceles implica $\overline{AB} = \overline{AC}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{AC} = \overline{AB} &\Longrightarrow x + 1 + \cancel{\sqrt{3}} = 3 + \cancel{\sqrt{3}}\\ &\Longrightarrow x = 2 \text{ cm}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Na figura abaixo,* ABC *é um triângulo retângulo em* B, *com catetos* $\overline{AB} = 6$ *cm e* $\overline{BC} = 8$ *cm. Se* D *é um ponto sobre o cateto* BC *tal que* $B\widehat{A}D = 30^o$ *e* $C\widehat{A}D = \alpha$, *quanto vale* $\operatorname{sen}\alpha$?



Solução. Como na solução do exemplo anterior, calculamos

$$A\widehat{D}B = 180^o - (30^o + 90^o) = 180^o - 120^o = 60^o$$

e

$$A\widehat{D}C = 180^o - 60^o = 120^o.$$

Agora, o Teorema de Pitágoras fornece

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2 \Longrightarrow \overline{AC}^2 = 100 \Longrightarrow \overline{AC} = 10.$$

Além disso, olhando para o triângulo ABD, obtemos:

$$\frac{\overline{BD}}{6} = \operatorname{tg} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \overline{BD} = \frac{\cancel{6}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Daí, segue que

$$\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 8 - 2\sqrt{3}.$$

Finalmente, aplicando a Lei dos Senos ao triângulo ADC e utilizando novamente o resultado do Exemplo 1, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CD}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} A\widehat{D}C} &\Longrightarrow \frac{8-2\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{10}{\operatorname{sen} 120^o}\\ &\Longrightarrow \frac{8-2\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &\Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{8\sqrt{3}-6}{20}\\ &\Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}.\end{aligned}$$

□

A segunda parte do resultado a seguir traz uma primeira aplicação da Lei dos Senos ao cálculo da área de um triângulo. As igualdades em (2) são conhecidas como as **fórmulas do seno** para a área (de um triângulo).

Corolário 5. *Seja* ABC *um triângulo cujos lados* AB, AC *e* BC *medem, respectivamente,* c, b *e* a. *Se* $A(ABC)$ *denota a área de* ABC, *então*

$$A(ABC) = \frac{bc \operatorname{sen}\widehat{A}}{2} = \frac{ac \operatorname{sen}\widehat{B}}{2} = \frac{ab \operatorname{sen}\widehat{C}}{2}. \quad (2)$$

Se R *denota o raio do círculo circunscrito a* ABC, *temos também que*

$$A(ABC) = \frac{abc}{4R}. \quad (3)$$

Prova. Para a primeira parte (isto é, para as fórmulas (2)), é suficiente estabelecermos a primeira delas, uma vez que as outras duas podem ser obtidas de modo análogo.

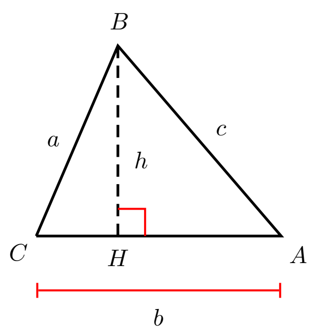
Primeiramente, se ABC é retângulo em A, podemos ver AB como base e AC como altura de ABC (ou vice-versa), de sorte que

$$A(ABC) = \frac{bc}{2}.$$

Recordando que sen $90^\circ = 1$, obtemos

$$A(ABC) = \frac{bc}{2} = \frac{bc\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}}{2}.$$

Suponha, agora, que ABC é acutângulo (veja a figura abaixo). Sendo H o pé da altura relativa ao lado AC e



$h = \overline{BH}$, temos:

$$\mathrm{sen}\,\widehat{A} = \frac{h}{c} \Longrightarrow h = c\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}.$$

Então,

$$A(ABC) = \frac{bh}{2} = \frac{bc\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}}{2}.$$

O caso em que ABC é obtusângulo é inteiramente análogo e, por isso, será deixado ao leitor.

Para (3), observe que a Lei dos Senos dá:

$$\mathrm{sen}\,\widehat{A} = \frac{a}{2R}.$$

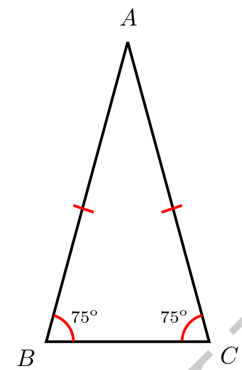
Substituindo tal expressão na primeira igualdade em (2), obtemos

$$A(ABC) = \frac{bc \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

$\square$

Os dois exemplos seguintes aplicam as fórmulas do corolário anterior.

Exemplo 6. *Calcule a área de um triângulo ABC, sabendo que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ cm e $\widehat{B} = 75^o$.*



Solução. Iniciamos calculando $B\widehat{A}C$, observando que $\overline{AB} = \overline{AC}$ implica $\widehat{B} = \widehat{C} = 75^o$:

$$\widehat{A} = 180^o - (75^o + 75^o) = 180^o - 150^o = 30^o.$$

Agora, aplicamos a fórmula do seno para a área, obtendo:

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \mathrm{sen}\,30^o}{2} \\ &= \frac{10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{100}{4} \\ &= 25 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

$\square$

O próximo exemplo é não trivial, e pode ser omitido numa primeira leitura.

Exemplo 7. *Um triângulo ABC é tal que $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Sabendo que sua área é igual a $\frac{b^2+c^2}{4}$, calcule as medidas de seus ângulos internos.*

Solução. Pondo $\overline{BC} = a$ e aplicando a fórmula do seno para a área, obtemos:

$$\frac{b^2 + c^2}{\cancel{4}} = \frac{bc\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}}{\cancel{2}} \Longrightarrow \mathrm{sen}\,\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2}{2bc}.$$

Agora, um pouco de Álgebra elementar fornece

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + c^2}{2bc} &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc + 2bc}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{2bc} + \frac{2bc}{2bc} \\ &= \frac{(b-c)^2}{2bc} + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Além disso, os passos acima deixam claro que

$$\frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1 \Longleftrightarrow \frac{(b-c)^2}{2bc} = 0 \Longleftrightarrow b = c.$$

Juntando as duas informações acima, concluímos que

$$\mathrm{sen}\,\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2}{2bc} \geq 1. \tag{4}$$

Mas, como $\operatorname{sen}\widehat{A} \leq 1$ por definição, segue que devemos ter $\operatorname{sen}\widehat{A} = 1$, de modo que $\widehat{A} = 90^\circ$.

Por outro lado, sendo $\operatorname{sen}\widehat{A} = 1$, as relações em (4) forçam termos

$$\frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1,$$

de maneira que $b = c$. Então, ABC é retângulo em A e isósceles de base BC, de sorte que

$$\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^{\text{o}} - 90^{\text{o}}}{2} = \frac{90^{\text{o}}}{2} = 45^{\text{o}}.$$

□

Terminamos este material apresentando uma outra fórmula útil para o cálculo da área de um triângulo qualquer, conhecida como **fórmula de Herão**. Tal fórmula expressa a área em função apenas das medidas dos lados do triângulo.

Corolário 8. *Se ABC é um triângulo de lados a, b, c e semiperímetro p, então*

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Prova. Primeiramente, utilizando o Corolário 5 e a relação $\operatorname{sen}^2\widehat{A} = 1 - \cos^2\widehat{A}$, obtemos:

$$\begin{aligned} A(ABC) = \frac{bc \operatorname{sen}\widehat{A}}{2} &\Rightarrow 2A(ABC) = bc\operatorname{sen}\widehat{A} \\ &\Rightarrow 4[A(ABC)]^2 = b^2c^2\operatorname{sen}^2\widehat{A} \\ &\Rightarrow 4[A(ABC)]^2 = b^2c^2\big(1 - \cos^2\widehat{A}\big). \end{aligned}$$

Agora, aplicando a Lei dos Cossenos, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Longrightarrow \cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Substituindo tal expressão para $\cos\widehat{A}$ no segundo membro da igualdade

$$\frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} = 1 - \cos^2\widehat{A}$$

e aplicando as fórmulas para o quadrado da soma de dois termos e para a diferença de dois quadrados, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} &= 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\ &= \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{\left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}. \end{aligned}$$

Recordando que $2p = a + b + c$, temos $b + c - a = 2p - 2a = 2(p-a)$ e, analogamente, $a + b - c = 2(p-c)$, $a - b + c = 2(p-b)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} &= \frac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{\cancel{16}p(p-a(p-b)(p-c)}{\cancel{4}b^2c^2} \\ &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}. \end{aligned}$$

Por fim, cancelando $\frac{4}{b^2c^2}$ em ambos os membros da igualdade

$$\frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2},$$

ficamos com

$$[A(ABC)]^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

e a fórmula de Herão segue após extrairmos raízes quadradas em ambos os membros dessa última igualdade. □

Exemplo 9. *Calcule a área do triângulo escaleno ABC cujos lados medem 13 cm, 14 cm e 15 cm.*

Solução. Vamos usar a fórmula de Herão, para o que começamos calculando o semiperímetro p do triângulo:

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Agora, temos

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ &= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84. \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Explique o caso em que o triângulo ABC é obtusângulo tanto no Teorema 2 quanto no Corolário 5, pois, embora os argumentos sejam análogos, é importante que os alunos compreendam o porquê dessa analogia. Recomendamos também que, ao expor os exemplos, sejam sempre ressaltados os momentos nos quais o Teorema 2 ou os Corolários 5 e 8 estão sendo utilizados.

As referências a seguir contêm mais exemplos e problemas de variados graus de dificuldade, envolvendo a Lei dos Senos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. São paulo, Editora Atual, 2013.