Material Teórico - Módulo Equações Algébricas-Propriedades das Raízes

Introdução às Equações Algébricas

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

24 de julho de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 A Álgebra

"Moḥammad ben Musā Khwārazmi" é o nome completo de um prolífico matemático, astrônomo e geógrafo Persa, também conhecido como "al-Khwārizmī". Ele viveu no século 9 depois de Cristo e a latinização de seu nome, assim como de algumas palavras árabes que aparecem em seus livros, deram origem a várias palavras modernas do Português, tais como "algoritmo", "algarismo" e "Álgebra".

A palavra "Álgebra", em particular, veio da forma como pronunciamos a palavra "al-jabr", que foi usada no título do livro mais famoso de al-Khwārizmī com o significado de "completar" e "reingressar", referindo-se a operações do método introduzido por ele para resolver equações, que equivale a passar termos de uma lado para outro da equação (ver a referência [2]).

Apesar de que a palavra "Álgebra" só surgiu no século 9, as técnicas utilizadas nessa área da Matemática têm raízes na Civilização Babilônica, a qual floresceu muitos séculos antes de Cristo. Em contraste, cerca 1 século antes de Cristo, os egípcios, gregos e chineses ainda resolviam equações utilizando métodos geométricos. Já no século III depois de Cristo, Diofanto de Alexandria, um matemático grego, escreveu uma série de livros intitulados "Aritmética", os quais discorriam de forma sistemática sobre a resolução exata de diversas equações, se distanciando da forma como seus colegas resolviam tais problemas. Por tal razão, Diofanto é considerado por vários historiadores como o pai da Álgebra. Contudo o estabelecimento da *Álgebra* como subárea (da Matemática), independente da Geometria e da Aritmética, costuma ser creditada a al-Khwārizmī.

A Álgebra trata de utilizar símbolos para representar objetos matemáticos (tais como números ou conjuntos) e estuda como realizar operações diretamente com tais símbolos. Como área da Matemática, ela trata do estudos dos símbolos em si e das operações que os regem de forma abstrata, sem a necessidade de uma prévia atribuição de valores a tais símbolos.

O exemplo a seguir ilustra o poder da Álgebra de simplificar a resolução de problemas aritméticos. Ele aparece na obra *Antologia Grega*, uma coleção de poemas escritos entre o século VII antes de Cristo e o século VI depois de Cristo.

Exemplo 1 (O ENIGMA DE DIOFANTO). *Diofanto passou* $1/6$ *de sua vida como criança,* $1/12$ *como adolescente e mais* $1/7$ *na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho, que morreu quatro anos antes de seu pai, com metade da idade (final) dele. Com quantos anos Diofanto morreu?*

Solução. Utilizemos a letra x para representar o número de anos vividos por Diofanto. Com os dados fornecidos no problema podemos compor a seguinte *equação*:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x.$$

Portanto,

$$x\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) = 9.$$

Operando a soma de frações do primeiro membro, obtemos

$$\frac{3x}{28} = 9 \implies x = 84.$$

□

2 Equações algébricas

Uma *equação* é uma sentença matemática que indica que duas expressões possuem valores iguais e na qual pelo menos uma dessas expressões envolve uma ou mais *incógnitas* (valores desconhecidos).[1] As expressões são conectadas usando o sinal de igualdade "=". Resolver uma equação dentro de um dado

[1] Os cognatos da palavra equação em outros idiomas possuem significados sutilmente diferentes. Por exemplo, a palavra "equation" em Inglês não requer que as expressões envolvidas façam uso de incógnitas.

conjunto universo significa calcular os possíveis valores das incógnitas, pertencentes a tal conjunto universo, que tornam a igualdade verdadeira.

Neste módulo, centraremos nossa atenção na resolução de *equações polinomiais.*

Definição 2. *Uma* ***equação polinomial*** *ou* ***algébrica*** *no universo dos números complexos é toda equação que pode ser reduzida (ou seja, que é equivalente) a uma equação da forma* $p(x) = 0$*, em que* $p(x)$ *é um polinômio com coeficientes complexos.*

Um número complexo r *é solução desta equação quando satisfaz* $p(r) = 0$*. Uma solução também é chamada de* ***raiz*** *da equação (ou do polinômio* $p(x)$*). O conjunto de todas as raízes (complexas) é chamado de* ***conjunto solução*** *da equação (no universo dos complexos).*

Exemplo 3. *Calcule o valor de* C*, sabendo que* 2 *é raiz do polinômio* $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x + C$*.*

Solução. Como 2 é raiz do polinômio $p(x)$, é preciso que a igualdade $p(2) = 0$ seja satisfeita. Substituindo x por 2 na expressão que define $p(x)$ e usando que $p(2) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + C = 0 &\implies 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + C = 0 \\ &\implies 16 - 12 + 14 + C = 0 \\ &\implies 18 + C = 0 \\ &\implies C = -18. \end{aligned}$$

Logo, $C = -18$. □

O **grau** de uma equação polinomial da forma $p(x) = 0$ é o grau do polinômio $p(x)$.

Exemplo 4. *Encontre uma equação polinomial de grau* 3 *que possui como raízes os números* 2*,* $3 + i$ *e* $3 - i$*.*

Solução. A equação

$$(x - 2)(x - (3 + i))(x - (3 - i)) = 0$$

possui como raízes os três números indicados no enunciado. De fato, o lado esquerdo da equação é formado por 3 fatores. Ao substituir x por 2, o primeiro desses fatores torna-se igual a zero, fazendo com que todo o produto seja zero, independentemente dos valores dos demais fatores. O análogo ocorre quando substituímos x por $3+i$ e por $3-i$.

Agora, veja que

$$\begin{aligned}(x-(3+i))(x-(3-i)) &= ((x-3)-i)((x-3)+i)\\ &= (x-3)^2-i^2\\ &= x^2-6x+9-(-1)\\ &= x^2-6x+10.\end{aligned}$$

Assim a equação inicial equivale a

$$(x-2)(x^2-6x+10)=0,$$

que, usando a propriedade distributiva da multiplicação, equivale a

$$x^3-6x^2+10x-2x^2+12x-20=0,$$

ou seja,

$$x^3-8x^2+22x-20=0.$$

Esta equação é de terceiro grau, como queríamos. □

Observação 5. *Observe que a equação obtida na solução acima não é a única que satisfaz o enunciado. Se multiplicarmos o lado esquerdo por qualquer real não nulo, obtemos outra equação com o mesmo conjunto-solução. Como veremos (ou melhor, revisaremos) na aula seguinte, uma consequência do Teorema Fundamental da Álgebra é que todas as equações que satisfazem o enunciado são geradas desta forma.*

Em módulos anteriores já aprendemos, em detalhes, a solucionar equações de primeiro e segundo graus (ou seja, de graus 1 ou 2). No módulo seguinte a este, "Equações Algébricas-Raízes e Coeficientes", revisaremos rapidamente tais métodos e apresentaremos métodos de resolução para equações de terceiro e quarto graus. É interessante observar que o foco não será memorizar fórmulas, mas sim aprender técnicas de manipulação algébrica que possam ser úteis em outras situações.

É um fato bastante conhecido (mas não elementar de ser demonstrado) que não existe uma formula geral para resolução de equações de graus maiores ou iguais a 5 e que use apenas a operação de radiciação e as 4 operações aritméticas elementares (soma, subtração, multiplicação e divisão). Para equações polinomiais de grau 5, esse fato é conhecido como o Teorema de Abel–Rufini, uma vez que Paolo Rufini apresentou uma demonstração incompleta em 1799 e Niels Abel forneceu uma demonstração completa em 1824. Para uma equação polinomial de grau arbitrário maior ou igual a 5, tal resultado é conhecido como o Teorema de Galois, e faz uso da chamada Teoria de Galois.[2] Contudo, tais demonstrações são não elementares, sendo estudadas apenas no Ensino Superior.

Na verdade é possível demonstrar algo ainda mais impressionante: existem equações polinomiais (particulares) de grau 5, sendo $x^5 - x - 1 = 0$ a mais simples delas, para as quais é impossível escrever suas raízes usando apenas radicais e operações elementares. Assim, qualquer fórmula que faça uso apenas dessas operações não conseguiria calcular todas as raízes nem mesmo dessa equação.

Por outro lado, o fato de que não conseguimos escrever as raízes de $x^5-x-1=0$ usando radicais não é um contratempo tão grande quanto possa parecer. Não é tão complicado encontrar valores aproximados para tais raízes usando softwares e, muitas vezes, isso pode ser suficiente para aplicações (em Física, por exemplo, desde que respeitadas as margens de erro desejadas). Além disso, é possível calcular exatamente certas expressões envolvendo as raízes de um polinômio sem conhecer cada uma delas individualmente. Por exemplo, as relações de Girard (que estudaremos em aulas futuras), nos garantem que a soma dos valores das cinco raízes dessa equação é exatamente igual a 0 e seu produto igual a 1.

Apesar da ausência de uma fórmula geral, há várias es-

[2]Devida ao matemático francês Évariste Galois, que viveu de 1811 a 1832 e é considerado um dos grandes gênios da Matemática.

tratégias que podem ser úteis para resolver equações polinomiais. Nas aulas seguintes, discutiremos maneiras sistemáticas de estudar as propriedades das raízes. Aqui, citaremos apenas uma técnica genérica que pode ajudar a resolver equações algébricas quaisquer (mas que nem sempre pode ser usada de forma muito prática): fatorar o polinômio $p(x)$ e usar a seguinte propriedade elementar sobre os números complexos (que, em particular, também vale para números reais):

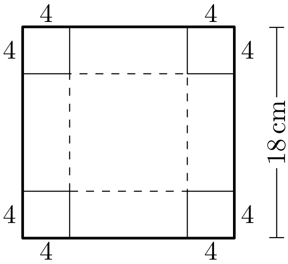
> Se o produto de dois números complexos é igual a zero, então *pelo menos* um deles é igual a zero.

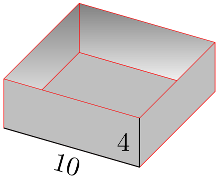
Assim, se conseguirmos expressar o polinômio $p(x)$ como um produto, $p(x) = f(x)\ g(x)$, concluiremos que $p(x) = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$. Dessa forma, o conjunto das raízes da equação $p(x) = 0$ é dado pela união dos conjuntos das raízes de $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$.

Uma maneira simples de fatorar um polinômio é quando já conhecemos uma de suas raízes. Neste caso, podemos utilizar o método de Briot-Rufini ou a divisão Euclidiana, se você preferir (veja o Módulo "Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos").

O problema a seguir é uma variação do primeiro problema estudado no Módulo "Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos".

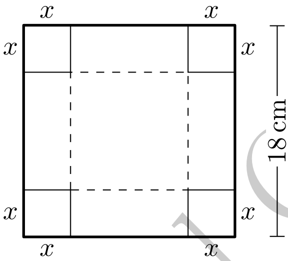
Exemplo 6. *Cortamos quadrados de lado* $4\,\mathrm{cm}$ *em cada canto de uma folha de papelão quadrada que possui* $18\,\mathrm{cm}$ *de lado. Dobrando a folha recortada conforme mostrado na figura abaixo, obtemos uma caixa retangular sem tampa, cujo volume é* $400\,\mathrm{cm}^3$*. Existe algum outro valor do lado do quadrado a ser recortado em cada canto para o qual o volume da caixa resultante também seja igual a* $400\,\mathrm{cm}^3$*?*

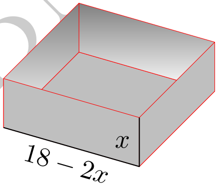




Solução. Representemos pela letra x a medida (desconhecida) do lado do quadrado a ser recortado.

Assim, as dimensões da caixa podem ser calculadas usado a figura seguinte.





Após dobradas as laterais, a base da caixa passa a ser um quadrado de lado $18 - 2x$ e, portanto, possui área $(18 - 2x)^2$. A caixa tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, logo, seu volume é dado pelo produto entre a área de sua base e sua altura, que é igual a x. Assim, o volume da caixa é dado pela expressão:

$$(180 - 2x)^2\, x.$$

Utilizando o produto notável para o quadrado de uma diferença, obtemos a expansão:

$$\begin{aligned}(18 - 2x)^2 &= 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 2x + (2x)^2 \\ &= 324 - 72x + 4x^2.\end{aligned}$$

Então, o volume da caixa é igual a

$$324x - 72x^2 + 4x^3.$$

Queremos saber para que valores de x este volume é igual a 400, ou seja:

$$324x - 72x^2 + 4x^3 = 400.$$

Dividindo ambos os lados desta equação por 4 e movendo todos os termos para o lado esquerdo da equação obtemos:

$$x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = 0.$$

De acordo com o enunciado já sabemos que 4 é uma das soluções dessa equação. Isso quer dizer que 4 é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 18x^2 + 81x - 100$ e, portanto, que tal polinômio é divisível por $x-4$ (veja a aula "Teorema do Resto" do Módulo "Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos" do 3º Ano do EM). Usando o método de Briot-Rufini para realizar tal divisão, obtemos:

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -18 & 81 & -100 \\ \hline & 1 & -14 & 25 & 0 \end{array}.$$

Dessa forma, queremos calcular os possíveis valores de x tais que:

$$p(x) = (x-4)(x^2 - 14x + 25) = 0.$$

Além de $x = 4$, qualquer outra solução deve satisfazer:

$$x^2 - 14x + 25 = 0.$$

Resolvendo essa equação de segundo grau, temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 100}}{2} \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{96}}{2} \\ &= \frac{14 \pm 4\sqrt{6}}{2} \\ &= 7 \pm 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Para terminar, precisamos nos atentar para o fato de que $x > 0$ e $18 - 2x > 0$, uma vez que tem de ser possível montar a caixa. Isso nos diz que $0 < x < 9$. No entanto, dentre os números $7 + 2\sqrt{6}$ e $7 - 2\sqrt{6}$, apenas o segundo satisfaz esta restrição. Assim, a único valor possível para x, distinto de $4\,\text{cm}$, é $(7 - 2\sqrt{6})\,\text{cm}$, ou seja, aproximadamente $2{,}1\,\text{cm}$. $\square$

Exemplo 7. *Calcule as raízes da equação* $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Solução. Uma vez que a soma dos coeficientes do polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ vale 0, temos que 1 é raiz do mesmo. Assim, dividindo o polinômio $p(x)$ por $x - 1$ (ou aplicando Briot-Rufini com $x = 1$), temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}.$$

Portanto,

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = (x - 1)(x^2 - x + 2)$$

Dessa forma, para que $p(x)$ seja zero, precisamos que $x - 1 = 0$ ou $x^2 - x + 2 = 0$. A primeira equação nos fornece a solução $x = 1$; a segunda, $x^2 - x + 2 = 0$, dá $\Delta = 1 - 8 = -7$, logo,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7}).$$

Assim, a equação do enunciado possui três raízes complexas, formando o conjunto-solução

$$\left\{1, \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7}), \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7})\right\}.$$

$\square$

Exemplo 8. *Calcule todas as raízes da equação*

$$3x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0.$$

Solução. Observe que:

$$\begin{aligned}3x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 2 = &\\ &= x^4(3x-1) - x^2(3x-1) - 2(3x-1)\\ &= (3x-1)(x^4 - x^2 - 2) = 0.\end{aligned}$$

Assim, a equação do enunciado é satisfeita se, e somente se, $3x - 1 = 0$ ou $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

Caso $3x - 1 = 0$, temos que $3x = 1$, logo, $x = 1/3$. Resta resolver a equação $x^4 - x^2 - 2 = 0$, que é uma equação biquadrada. Fazendo $x^2 = y$, obtemos a equação de segundo grau $y^2 - y - 2 = 0$, que, uma vez resolvida, dá $y = -1$ ou $y = 2$. Com isso, $x^2 = -1$ ou $x^2 = 2$, o que nos fornece outras quatro raízes: $x = i$, $x = -i$, $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. Assim, o conjunto-solução da equação do enunciado é

$$\left\{\frac{1}{3}, i, -i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}.$$

□

Dicas para o Professor

O assunto desse material pode ser abordado em um único encontro. Talvez um dos principais intuitos, além de contar um pouco sobre a história da Álgebra, seja fazer os alunos perceberem o fato de que é possível resolver algumas equações de graus maiores que 2. Evidentemente, o fato de não existirem fórmulas fechadas, dadas por meio de radicais e operações elementares, para resolver equações de graus maiores ou iguais a 5 torna esse assunto bem mais desafiador. Mas isso não quer dizer que todas as equações de grau pelo menos 5 sejam difíceis. O ponto é que, sem poder simplesmente memorizar uma fórmula, temos que atacar cada equação de uma maneira diferente e precisamos de bastante experiência para intuir qual o caminho adequado a cada tipo de equação.

A referência [1] contém uma discussão relativamente completa e profunda sobre equações polinomiais. A referência [4] é uma agradável leitura, a qual contempla a história das tentativas de se resolver equações polinomiais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Muhammad_ibn_Musa_al-Khwarizmi`.

3. Abel-Ruffini Theorem, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Abel-Ruffini_theorem`.

4. I. Stewart. *Uma História da Simetria em Matemática*. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.