Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Regra da Cadeia - Exercícios - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Janeiro de 2025

Portal OBMEP

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Apresentaremos vários exemplos relacionados à regra da cadeia, enunciada na aula anterior.

1 Exemplos

Exemplo 1. *A* força gravitacional *com a qual um foguete de massa m é atraído a um planeta P, de massa M, tem intensidade dada por*

$$F = \frac{GmM}{r^2}, \tag{1}$$

sendo r a distância do foguete ao centro de massa de P e *G uma constante* [1].

a) *Considerando $r = r(t)$ como uma função (suave) do tempo, calcule o quão rapidamente a força gravitacional está variando, em relação ao tempo, no instante t_0 em que a distância do foguete ao centro de massa do planeta é de* $5\,000$ *km e sua velocidade de* afastamento *é igual a* $2,5$ *km/s.*

b) *Se $\phi(r) := GmM/r$ é a energia potencial gravitacional do sistema (formado pelo foguete e o planeta), mostre que $F = -d\phi/dr$.*

c) *Verifique a relação*

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{d^2\phi}{dr^2}\cdot\frac{dr}{dt}.$$

Solução. O item a) pede para que se calcule $\frac{dF}{dt}$ no instante t_0 em que $r(t_0) = 5 \cdot 10^6$ m e

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0} = 2,5 \cdot 10^3\,\text{m/s}.$$

[1] A equação (1) é a forma escalar da *lei de gravitação universal*. Por sua vez, G chama-se *constante gravitacional universal* e vale $6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Portal OBMEP

Sendo

$$\frac{dF}{dr} = GmM \cdot \frac{d(r^{-2})}{dr} = -\frac{2GmM}{r^3},$$

a regra da cadeia permite escrever

$$\begin{aligned}\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=t_0} &= \left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=5\cdot 10^6} \cdot \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0}\\ &= -\frac{2GmM}{1,25\cdot 10^{20}} \cdot (2,5\cdot 10^3)\\ &= -\frac{4GmM}{10^{17}}.\end{aligned}$$

Portanto, no instante t_0, a força de atração F está *decrescendo* a uma taxa de $4GmM \cdot 10^{-17}$ N/s.

Deixaremos a verificação do item b) ao encargo do leitor.

Quanto ao item c), o cálculo segue diretamente e b) e da regra da cadeia ao considerarmos F como a composição da função distância $t \mapsto r(t)$ com o oposto da primeira derivada $r \mapsto -d\phi/dr$ da função energia:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{d\left(-\frac{d\phi}{dr}\right)}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = -\frac{d^2\phi}{dr^2}\cdot\frac{dr}{dt}.$$

□

Exemplo 2. *Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função f de regra $f(x) = \sqrt[3]{x + 7\sqrt{x}}$ no ponto de abscissa* 1.

Solução. A regra funcional dada faz sentido se, e só se, $x \geq 0$. Dessa forma, $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é a composição $h \circ g$ das funções $g, h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definidas por $g(x) = x + 7\sqrt{x}$ e $h(y) = \sqrt[3]{y}$.

Sendo g e h deriváveis em $(0, +\infty)$, a regra da cadeia garante que $f = h \circ g$ é derivável na semirreta positiva $(0, +\infty)$, valendo

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x), \quad \forall\, x > 0.$$

Portal OBMEP

Observando que

$$h'(y) = \frac{1}{3} \cdot y^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}},\ y > 0,$$

e

$$g'(x) = 1 + \frac{7}{2\sqrt{x}},\ x > 0,$$

obtemos, uma vez que $g(1) = 8$,

$$\begin{aligned} f'(1) &= h'(g(1)) \cdot g'(1) = h'(8) \cdot g'(1) \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} \cdot \left(1 + \frac{7}{2\sqrt{1}}\right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Por fim, como $f(1) = 2$, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2)$ é dada por

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 2 + \frac{3(x-1)}{8},$$

ou seja, $3x - 8y + 13 = 0$. □

No exemplo anterior, determinamos o domínio maximal da função que desejávamos derivar e, com auxílio da regra da cadeia, encontramos o domínio de sua 1ª derivada. Sugerimos que o leitor faça o mesmo para as funções do próximo

Exemplo 3. *Calcule as derivadas indicadas das funções cujas regras são dadas abaixo.*

a) $f'(\pi/4)$, *se* $f(x) = e^{1/x} + \ln(\cos x)$.

b) $f'(0)$, *se* $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^{\sec x} - 1}{e^{\operatorname{tg} x} + 1}}$.

Solução. Para o item a), se $y = x^{-1}$, a regra da cadeia permite escrever

$$\begin{aligned} \frac{d(e^{1/x})}{dx} &= \frac{d(e^y)}{dy} \cdot \frac{d(x^{-1})}{dx} \\ &= e^y \cdot (-x^{-2}) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}. \end{aligned}$$

Portal OBMEP

Por outro lado, tomando $y = \cos x$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d(\ln(\cos x))}{dx} &= \frac{d(\ln y)}{dy} \cdot \frac{d(\cos x)}{dx}\\ &= \frac{1}{y} \cdot (-\operatorname{sen} x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\\ &= -\operatorname{tg} x.\end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(x) = -\left(\frac{e^{1/x}}{x^2} + \operatorname{tg} x\right),$$

de modo que

$$f'(\pi/4) = -\left(\frac{16e^{4/\pi}}{\pi^2} + 1\right).$$

Quanto ao item b), note que $y = \frac{e^{\sec x}-1}{e^{\operatorname{tg} x}+1}$ assume o valor $(e-1)/2$ no ponto $x = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}f'(0) &= \left.\frac{d(\sqrt{y})}{dy}\right|_{y=(e-1)/2} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{e-1}} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}.\end{aligned}$$

Para calcular dy/dx em $x = 0$, utilizaremos a regra do quociente, observando que, pela regra da cadeia,

$$\frac{d(e^{\sec x} - 1)}{dx} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x \cdot e^{\sec x}$$

e

$$\frac{d(e^{\operatorname{tg} x} + 1)}{dx} = \sec^2 x \cdot e^{\operatorname{tg} x}.$$

Portanto, sendo $\sec 0 = 1$ e $\operatorname{tg} 0 = 0$, vem que

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} &= \frac{\sec 0 \cdot \operatorname{tg} 0 \cdot e^{\sec 0}(e^{\operatorname{tg} 0} + 1) - (e^{\sec 0} - 1)\sec^2 0 \cdot e^{\operatorname{tg} 0}}{(e^{\operatorname{tg} 0} + 1)^2}\\ &= -\frac{e-1}{4},\end{aligned}$$

Portal OBMEP

de sorte que

$$f'(0) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{e-1}} \cdot \left(-\frac{e-1}{4} \right) = -\frac{\sqrt{e-1}}{4\sqrt{2}}.$$

$\square$

Exemplo 4. *Um ponto P move-se sobre a parábola $y^2 = x$, $x > 0$, $y > 0$. A abscissa $x = x(t)$ varia com uma aceleração que, em cada instante t, é o dobro do quadrado da velocidade da ordenada $y = y(t)$. Mostre que a ordenada descreve um MRU (movimento retilíneo uniforme).*

Solução. Lembre-se de que um movimento retilíneo é dito uniforme quando sua velocidade é constante ou, equivalentemente, sua aceleração é nula. Assim, precisamos provar que $\frac{d^2y}{dt^2} \equiv 0$, condição que, como esperamos, será obtida derivando-se a relação $x = y^2$ duas vezes em relação a t.

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{dx}{dt} = 2y \cdot \frac{dy}{dt}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + 2y \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\\ &= 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dt^2}.\end{aligned}$$

Agora, a condição dada no enunciado, de que a abscissa $x = x(t)$ varia com uma aceleração que, em cada instante t, é o dobro do quadrado da velocidade da ordenada $y = y(t)$, traduz-se na igualdade

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Substituindo essa igualdade na anterior, obtemos

$$2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dt^2},$$

Portal OBMEP

logo,

$$2y\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\equiv 0.$$

Por fim, como $y>0$, segue que $d^2y/dt^2\equiv 0$, conforme queríamos mostrar. $\square$

Exemplo 5. *Seja P uma função polinomial tal que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\operatorname{sen}P(x)$, é periódica. Mostre que P é uma função afim.*

Solução. Afirmamos que f' é periódica. Além disso, todo período de f também será um período de f'. Com efeito, se $T>0$ for um período de f, a igualdade $f'(x+T)=f'(x)$ segue por diferenciação (em cada membro) da relação $f(x+T)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Agora, como $f'=(\cos\circ P)\cdot P'$, temos que f' é contínua. Sendo também periódica, concluímos que f' é limitada [2], digamos $|f'|\leq M$, para uma certa constante positiva M.

Se P não fosse afim, o grau de P' seria ao menos 1, logo, teríamos

$$\lim_{x\to+\infty}P'(x)=\pm\infty.$$

A menos de trocar P por $-P$, o que não muda o fato de f ser periódica nem altera o grau de P, podemos supor que

$$\lim_{x\to+\infty}P'(x)=+\infty, \tag{2}$$

o que implica

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty. \tag{3}$$

Por (2), existe $A>0$ de tal modo que

$$x>A\Rightarrow P'(x)>M.$$

Por (3), a imagem do intervalo $(A,+\infty)$ pela função P é um intervalo ilimitado superiormente. Consequentemente, tal intervalo deve conter todos os números da forma $2k\pi$ para

[2] Vide exemplo 1 da aula *Exercícios - Parte III*, no módulo *Funções Contínuas.*

Portal OBMEP

cada inteiro k suficientemente grande. Sendo k_0 um desses inteiros, existe $x_0 > A$ tal que $P(x_0) = 2k_0\pi$, de onde segue a contradição

$$M \geq f'(x_0) = P'(x_0)\cos P(x_0) = P'(x_0) > M.$$

Portanto, o grau de P não supera 1 e isso significa que P é afim. $\square$

Para o próximo exemplo, sejam f uma função derivável e a, b números reais; uma aplicação simples da regra da cadeia permite escrever

$$\frac{d(f(ax+b))}{dx} = a \cdot f'(ax+b) \tag{4}$$

para todo x tal que $ax + b$ pertença ao domínio de f [3].

Exemplo 6 (IMC - 2023). *Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com segunda derivada contínua, para as quais*

$$f(7x+1) = 49f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Derivando duas vezes a relação dada com o auxílio de (4), obtemos

$$49f''(7x+1) = 49f''(x)$$

para todo x. Pondo $(x-1)/7$ no lugar de x nessa igualdade, vem que

$$f''(x) = f''((x-1)/7)$$

para cada x. Logo, se g for a função afim $g(x) = (x-1)/7$, segue a relação $f'' = f'' \circ g$, de onde se conclui por indução que

$$f'' = f'' \circ g^{(n)} \tag{5}$$

para todo n natural, sendo $g^{(n)}$ a composição de n fatores iguais a g.

[3] Esse resultado já foi obtido na aula *Exercícios - Parte II*, no módulo *Fórmulas de Diferenciação*.

Portal OBMEP

Também por indução em $n \in \mathbb{N}$, é fácil mostrar que

$$g^{(n)}(x) = \frac{x}{7^n} - \frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n}{6}$$

para todo x e para todo n. Portanto, segue da continuidade de f'' que

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{n\to\infty} f''(g^{(n)}(x)) \\ &= f''\big(\lim_{n\to\infty} g^{(n)}(x)\big) = f''(-1/6), \end{aligned}$$

de sorte que f'' é constante.

Assim [4], f é um polinômio de grau ≤ 2, digamos $f(x) = ax^2+bx+c$. Substituindo essa expressão na equação funcional, obtemos, após um pouco de álgebra elementar,

$$49ax^2 + (14a + 7b)x + (a + b + c) = 49(ax^2 + bx + c).$$

Comparando coeficientes, obtemos $14a+7b = 49b$ e $a+b+c = 49c$ ou, ainda,

$$a = 3b \;\text{ e }\; a + b = 48c.$$

Então, $b = 12c$ e $a = 36c$.

Concluindo, o conjunto-solução da equação funcional dada consiste das funções reais de uma variável real f da forma $f(x) = c(36x^2 + 12x + 1)$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

A seguinte observação será utilizada diversas vezes.

Observação 7. *Sejam I um intervalo, $a \in I$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $a \leq x \in I$.*

Então, existe uma constante K tal que

$$f(x) \leq g(x) + K \tag{6}$$

para todo $x \in I$, $x \geq a$.

Com efeito, o enunciado acima consiste, essencialmente, do exemplo 7 da aula Exercícios - Parte III, *no módulo*

[4] Vide exemplo 5 da aula *Exercícios - Parte II*, no módulo *Fórmulas de Diferenciação.*

Portal OBMEP

Fórmulas de Diferenciação, *o qual permite tomar* $K = f(a) - g(a)$. *Além disso, valem versões desse resultado com "$\leq$" substituído por qualquer um dos sinais "$<$", "$\geq$" ou "$>$" (nas desigualdades funcionais).*

Um caso particular dessa discussão ocorre quando $f' = g'$ *em* I. *Nesses termos, temos* $f = g + K$ *para alguma constante* K.[5]

Exemplo 8. *Seja* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função duas vezes derivável, com derivada positiva. Se a função* $x \mapsto e^{f(x)}$ *for convexa, mostre que, para cada* $a > e$, *valerá* $f(x) > \log_a x$, *para todo* x *suficientemente grande.*

Solução. Defina $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $g(x) = e^{f(x)}$. A função g é derivável pela regra da cadeia, com $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ para cada real x. Daí, pelo fato de f ser duas vezes derivável, vemos que g também admite segunda derivada, valendo (novamente pela regra da cadeia)

$$g''(x) = (f''(x) + f'(x)^2)e^{f(x)}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

A convexidade de g equivale à desigualdade $g'' \geq 0$, ou seja, a $f''(x) + f'(x)^2 \geq 0$. Por sua vez, como $f'(x) > 0$ por hipótese, essa última desigualdade equivale a

$$-\frac{f''(x)}{f'(x)^2} \leq 1.$$

Como

$$-\frac{f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{d(1/f'(x))}{dx},$$

a desigualdade anterior implica, via observação 7,

$$\frac{1}{f'(x)} \leq x + K$$

para todo x suficientemente grande e uma certa constante K.

[5] Já utilizamos esse resultado várias vezes, valendo-nos do fato de que uma função derivável (definida em um intervalo) tem derivada nula se, e só se, tal função é constante.

Portal OBMEP

Utilizando novamente o fato de que $f' > 0$, vem

$$f'(x) \geq \frac{1}{x+K} = \frac{d(\ln(x+K))}{dx}$$

para todo x suficientemente grande, o que, por mais uma aplicação da observação 7, dá

$$f(x) \geq \ln(x+K) + L$$

para todo x suficientemente grande, digamos $x > M$, $M > 0$, e alguma constante real L.

Por fim, notando que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+K)+L}{\log_a x} = \ln a$$

(exercício!), a desigualdade $\ln a > 1$ implica, pelo teorema da permanência do sinal, $\ln(x+K) + L > \log_a x$ para todo $x > N$, sendo N uma certa constante positiva. Portanto, $f(x) > \log_a x$ para todo $x > \max\{M, N\}$. $\square$

Dicas para o Professor

Em relação ao resultado enunciado na observação 7, o leitor familiarizado com a teoria da integral de Riemann, pode ter pensado que a tese segue da hipótese *integrando a desigualdade $f' \leq g'$ de a até x.*

Muito embora o trecho destacado se configure como um argumento natural no contexto das integrais, há de se notar que alguma hipótese adicional sobre as derivadas deve ser feita para garantir que elas sejam integráveis. Frequentemente, supõe-se continuidade; aliás, não é raro que, em certas soluções, a hipótese de continuidade de uma derivada seja utilizada unicamente para garantir sua integrabilidade e, a posteriori, uma desigualdade do tipo (6).

Nesse sentido, o mérito da observação 7 é claro: *sobre um intervalo fechado à esquerda, a implicação $f' \leq g' \Rightarrow$*

Portal OBMEP

$f \le g + K$ vale sem nenhuma hipótese suplementar sobre as derivadas.

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.
2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.
3. M. Spivak. *Calculus.* 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.

Portal OBMEP