Material Teórico - Probabilidade – Miscelânea de Exercícios

Cálculo de probabilidades 2

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

16 de novembro de 2019

1 Exercícios variados

Continuamos com a resolução de exercícios, focando inicialmente no cálculo de probabilidades envolvendo permutações.

Exemplo 1. *Num condomínio há sete moradores e há sete vagas de estacionamento, numeradas de 1 a 7. Será realizado um sorteio para definir qual morador ficará com qual vaga (resultando em exatamente um vaga para cada morador). O sorteio será realizado de forma tradicional, colocando-se os números de 1 a 7 em um saco e os embaralhando. Em seguida, cada morador irá retirar um número do saco e ficará com a vaga correspondente. A vaga número 4 é a melhor em todos os quesitos, por exemplo, sendo mais fácil para estacionar. Dentre os moradores estão Ana, Beto e Ciro. Ana será a primeira a sortear um número, Beto será o segundo e Ciro será o sétimo. Compare as probabilidades de cada um deles ficar com a melhor vaga.*

Solução. Sejam A, B e C, respectivamente, as probabilidades de Ana, Beto e Ciro ficarem com a melhor vaga (ou seja, a vaga de número 4).

É fácil calcular A, já que todos os 7 números estão no saco e cada um deles pode ser obtido com igual probabilidade. A probabilidade de Ana obter o número 4 é:

$$A = \frac{1}{7}.$$

Para que Beto fique com a vaga 4, é preciso primeiro que Ana *não* obtenha o número 4 e que, em seguida, ele o obtenha. A probabilidade de Ana não obter o 4 é igual a $6/7$ (já que há seis outros números dentre as sete possibilidades); condicionada a tal escolha, Beto tem $1/6$ de chance de obter o número 4 (já que restam seis números no saco, dos quais exatamente um é igual a 4). Com isso, a probabilidade de Beto ficar com a vaga 4 é:

$$B = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7}.$$

Resta analisar a probabilidade de Ciro ficar com a vaga 4. Para que isso ocorra, é preciso que cada um dos condôminos anteriores não obtenha o número 4 (já que Ciro ficará com o número que sobrar no saco). Em cada sorteio há um número a menos no saco e é preciso que o condômino em questão obtenha qualquer número diferente de 4. Vejamos: Ana não obtém a vaga com probabilidade $6/7$; condicionada a tal escolha, Beto também não a obtém com probabilidade $5/6$, e assim por diante. Temos, então, que a probabilidade de Ciro obter a vaga 4 é:

$$C = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{7}.$$

Concluímos que todos possuem a mesma chance de obter a vaga desejada, independentemente da ordem em que participarem do sorteio. De fato, não é difícil se convencer de que os demais condôminos também terão probabilidade $1/7$ de obter a melhor vaga. □

Solução alternativa. Observe a execução do sorteio de cada um dos números, anotando o resultado obtido por cada condômino na ordem em que os números são retirados do saco. Veja que, ao fazer isso, anotaremos uma permutação do conjunto de números $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Existem, ao todo, $7!$ (sete fatorial) permutações desse conjunto. Pela simetria do problema, como cada número possui a mesma probabilidade de ser obtido em cada etapa, segue que cada uma dessas $7!$ permutações possui a mesma probabilidade de ser obtida, ou seja, cada uma delas tem probabilidade de ser obtida igual a

$$\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}.$$

Vejamos um exemplo: suponha que os números foram sorteados na ordem $(5, 1, 6, 3, 2, 7, 4)$, de modo que o primeiro condômino ficará com a vaga 5, o segundo com a vaga 1 e assim por diante. Vamos calcular a probabilidade disso acontecer. A probabilidade de obter o número 5 no primeiro sorteio é $1/7$; a probabilidade de obter o número 1 no segundo sorteio é $1/6$; a de obter o número 6 no terceiro sorteio é $1/5$ e assim por diante. Dessa forma, a probabilidade de obter a sequência $(5, 1, 6, 3, 2, 7, 4)$ é:

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{7!}$$

De volta ao problema, vamos calcular a probabilidade de Ciro ganhar a vaga número 4. Isso acontece quando o número 4 é o último do sorteio, ou seja, quando a permutação termina em 4. Como todas as permutações possuem a mesma probabilidade, basta contar em quantas delas o 4 aparece na última posição e dividir pelo total de permutações. Fixada a posição do 4, podemos ordenar os demais seis números de $6!$ maneiras. Logo, a probabilidade desejada é:

$$\frac{6!}{7!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{7}.$$

Por fim, o mesmo argumento se aplica para qualquer outra posição escolhida para o número 4. Assim a probabilidade de Ana, Beto ou qualquer outro condômino ficar com a melhor vaga também é $1/7$. □

Exemplo 2 (OBMEP)**.** *Pedro vai participar de um programa de prêmios em que há uma urna contendo quatro bolas com valores diferentes e desconhecidos por ele, que serão sorteadas uma a uma até que ele decida ficar com uma deles. Ele observa o valor das duas primeiras bolas sorteadas e as descarta. Se o valor da terceira bola sorteada for maior que os das duas primeiras, ele ficará com ela e, caso contrário, ficará com a bola que restou. Qual é a probabilidade de Pedro ficar com a bola de maior valor?*

(*a*) $\frac{1}{4}$.

(*b*) $\frac{1}{3}$.

(*c*) $\frac{3}{8}$.

(*d*) $\frac{5}{12}$.

(*e*) $\frac{1}{2}$.

Solução. Resolveremos esse problema usando permutações, seguindo a ideia da segunda solução do exemplo anterior.

Suponhamos, sem perda da generalidade, que as bolas sejam numeradas de 1 a 4. Queremos calcular a probabilidade de Pedro ficar com a bola de número 4, caso ele siga a estratégia descrita no enunciado.

Note que existem $4! = 24$ possíveis ordenações para os números sorteados, e precisamos contar em quantas delas Pedro ficará com a bola 4. Daí, basta dividir essa quantidade por 24 para obter a probabilidade pedida.

Para que Pedro ganhe, é necessário (mas não suficiente) que a bola de número 4 seja a terceira ou a quarta sorteada (já que as duas primeiras bolas serão descartadas). Consideremos esses dois casos separadamente:

(i) Caso a bola de número 4 seja a terceira sorteada, ela será escolhida por Pedro, independentemente de quais tenham sido as duas primeiras, já que ela será maior do que as duas primeiras. O número de permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$ em que o número 4 aparece na terceira posição é $3!$, ou seja, 6 permutações.

(ii) Suponha, agora, que a bola 4 seja a quarta sorteada. Para que Pedro fique com ela, ele deve *não* escolher a terceira bola sorteada, o que, por sua estratégia, ocorrerá quando a terceira bola não for maior do que alguma das duas primeiras. Veja que, como a bola 4 estará na quarta posição, as três primeiras bolas formarão uma permutação de $1, 2, 3$. Assim, existem duas permutações em que Pedro ficará com a terceira bola – a saber, aquelas em que bola 3 aparece na terceira posição – e quatro permutações em que ele não ficará com a terceira bola – aquelas em que a bola 3 aparece na primeira ou na segunda posição. Essas quatro últimas permutações são as que nos interessam.

Considerando todos os casos, temos $6 + 4 = 10$ permutações em que a bola de número 4 é escolhida por Pedro. Assim, a probabilidade de Pedro pegar tal bola é:

$$\frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

Segue que a alternativa correta é: (*d*). □

Observação 3. *O problema anterior é um caso particular do chamado "Problema da Secretária". Nele, um empregador deseja contratar uma secretária. Ele conhece o número n de candidatos para o cargo e pode atribuir para cada candidato uma nota, de modo que não haja empates (as notas fazem o papel dos números escritos nas bolas). Contudo, antes de iniciar as entrevistas ele não sabe nada sobre o perfil dos candidatos e não tem como "*chutar*" qual será a maior ou a menor nota. As candidatas serão entrevistadas numa ordem aleatória e após cada entrevista o empregador deve decidir se irá empregar a atual candidata ou se irá mandá-la embora, sem chance de revê-la. O objetivo é encontrar uma estratégia que maximize a probabilidade de contratar a melhor secretária.*

É possível demonstrar que a melhor estratégia consiste em observar as notas das n/e primeiras entrevistadas (onde e é o número de Euler), sem contratar nenhuma delas, independentemente das notas obtidas, e, em seguida, contratar a primeira entrevistada que tiver nota maior do que todas as anteriores ou (ser forçado a) ficar com a última entrevistada, caso não apareça uma que seja melhor que todas as anteriores. Também é possível provar que, adotando essa estratégia, a probabilidade de contratar a melhor candidata é $1/e$. Entretanto, a demonstração das afirmações acima foge do escopo deste texto.

Exemplo 4. *Motores de avião funcionam independentemente, e cada motor tem a mesma probabilidade ($p > 0$) de falhar durante o voo. Um avião voa com segurança se pelo menos a metade de seus motores estiver funcionando. Para que valores de p é mais seguro viajar em uma avião com dois motores do que em uma avião com quatro motores?*

Solução. Calculemos, em função de p, a probabilidade de cada tipo de avião *não* voar com segurança.

O avião de 2 motores *não* voará com segurança somente se ambos os motores falharem. Evidentemente, isso acontece com probabilidade p^2.

O avião de 4 motores não voará com segurança somente se 3 ou 4 motores falharem. Para que exatamente 3 motores falhem, temos 4 possibilidades: o primeiro motor funciona e os demais falham; ou o segundo funciona e os demais falham; ou o terceiro funciona e os demais falham; ou o quarto funciona e os demais falham. Essas quatro situações são eventos disjuntos, com cada um acontecendo com probabilidade $p^3(1 - p)$; isso nos dá uma probabilidade total de $4p^3(1 - p)$. Por fim, temos o caso em que os 4 motores falham, o que acontece com probabilidade p^4. Assim, ao todo, a probabilidade desse avião não voar com segurança é $4p^3(1 - p) + p^4$.

Será mais seguro viajar no avião de dois motores quando a probabilidade dele falhar for menor do que a probabilidade do outro avião falhar. Isso acontecerá quando

$$p^2 < 4p^3(1 - p) + p^4.$$

Como $p^2 > 0$, podemos dividir ambos os lados dessa inequação por p^2, obtendo uma inequação de segundo grau equivalente:

$$1 < 4p(1-p) + p^2,$$

que é satisfeita se, e só se,

$$1 < 4p - 3p^2$$

ou, ainda,

$$3p^2 - 4p + 1 < 0.$$

Para resolver essa inequação, basta fazer o estudo do sinal da função quadrática $f(p) = 3p^2 - 4p + 1$ (veja a aula "Gráfico de uma Função Quadrática" do Módulo "Função Quadrática" e o Módulo "Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau", ambos do Primeiro Ano do Ensino Médio). Primeiramente, obtemos as raízes de $f(p) = 0$. Temos que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$, de sorte que

$$p = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{1}{3} \text{ ou } 1.$$

Como o gráfico de f é uma parábola com concavidade para cima, temos $f(p) < 0$ quando $1/3 < p < 1$.

A conclusão é que, quando $1/3 < p < 1$, é mais vantajoso viajar no avião de 2 motores. (Quando $p = 1/3$ ou $p = 1$, ambos os aviões oferecem o mesmo risco. Por fim, para $p < 1/3$, é mais vantajoso viajar no avião de 4 motores). $\square$

Exemplo 5 (UNIRIO). *O jogador de cartas A deseja ser admitido em uma roda de jogadores. Para tanto, ele deve jogar três partidas contra os membros B e C da mesa. Antes de começar a jogar, ele deve escolher entre jogar duas partidas contra B e uma contra C ou duas partidas contra C e uma contra B. Para ser admitido, ele deve ganhar pelo menos uma partida contra B e pelo menos uma contra C. Sabe-se que a probabilidade de A ganhar de B é p e a probabilidade de A ganhar de C é q, onde $p < q$. Indique a escolha mais vantajosa para A, justificando sua resposta.*

Solução. Esse problema é bastante interessante, já que a pergunta é se devemos jogar mais vezes contra o membro mais forte ou contra o membro mais fraco, obedecendo a regra de que para ser aceito é preciso ganhar uma vez de cada um deles. Em símbolos, temos que:

$$\Pr(A \text{ ganhar de } B) = p \quad \text{e} \quad \Pr(A \text{ ganhar de } C) = q,$$

onde $p < q$.

O oponente mais forte é B, já que A tem menos chances de ganhar dele do que de C. O medo pode fazer com que A não queira jogar duas vezes contra o oponente mais forte; porém, como é necessário ganhar pelo menos uma vez de cada oponente, intuitivamente, para aumentar suas chances, o melhor que A tem a fazer é jogar várias vezes contra o oponente mais difícil. Vejamos se nossa intuição está correta, analisando ambas as situações propostas no enunciado.

(i) jogar duas partidas contra B e uma partida contra C: O jogador A deve ganhar pelo menos uma das partidas contra B, o que dá três possibilidades: ganhar ambas as partidas contra B; ganhar a primeira partida e perder a segunda; perder a primeira e ganhar a segunda. Em cada um desses casos, A ainda precisa ganhar a partida contra C. Logo, a probabilidade de A ser aceito no clube é $ppq + p(1-p)q + (1-p)pq$. Colocando pq em evidencia e simplificando a expressão, obtemos:

$$pq(2-p).$$

(ii) jogar duas partidas contra C e uma partida contra B. Veja que esse caso é análogo ao caso anterior, apenas invertendo os papeis de p e q. Obtemos, então, a probabilidade:

$$qqp + q(1-q)p + (1-q)qp = pq(2-q).$$

Ora, como $q > p$, temos que $-q < -p$, logo $2-q < 2-p$. Como $pq > 0$, segue que $pq(2-q) < pq(2-p)$. Assim, a estratégia do item (i) realmente dá ao jogador A mais chances de entrar para o clube. $\square$

Exemplo 6 (PUC-RJ-2010, adaptado). *Em um jogo eletrônico um personagem, chamado Isaac, precisa atravessar uma sala. Essa sala possui 7 cristais coloridos, de cores diferentes, posicionados sobre uma linha reta entre a entrada (que fica do lado esquerdo) e a saída da sala (que fica do lado direito). O personagem deve pular de um cristal para o outro e para conseguir sair da sala ele precisa aterrissar em cada um dos cristais exatamente uma vez, seguindo a ordem das cores do arco-íris:* vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, índigo e violeta. *Contudo, a ordem em que os cristais estão posicionados é uma permutação aleatória dessas cores (escolhida de maneira uniforme entre as $7!$ permutações). O personagem pode saltar de uma cor para outra à sua direita gratuitamente, mas para saltar de um cor a qualquer cor à sua esquerda, por conta de uma corrente de ar, ele precisa acionar uma hélice mágica que custa uma carga.*

Por exemplo, suponha que as cores tenham sido sorteadas no ordem: amarelo, laranja, índigo, verde, violeta, vermelho, azul. Ele chega no cristal vermelho gratuitamente, paga 1 carga para ir para o laranja, paga 1 carga para ir para o amarelo, vai para o verde e para o azul de graça, paga 1 carga para ir ao índigo, vai para o violeta e sai da sala de graça. Ao todo, ele gasta 3 cargas nessa situação.

Considere, agora, uma ordem aleatória. Qual a probabilidade de que Isaac:

(a) *Passe pela sala sem gastar nenhuma carga?*

(b) *Passe pela sala gastando uma carga para ir do vermelho até o laranja e depois não precise gastar mais nenhuma outra carga?*

(c) *Precise gastar exatamente uma carga para passar pela sala?*

Solução.
(a) A única maneira de Isaac não gastar cargas é se ele nunca precisar ir para a esquerda. Mas isso só pode acontecer se as cores aparecerem exatamente na mesma ordem em que aparecem no arco-íris. Ou seja, só existe uma possível permutação das cores em que ele não gasta cargas. Logo, a probabilidade de que isso aconteça é $1/7! = 1/5040$.

(b) Para que isso aconteça, a cor laranja deve aparecer à esquerda da cor vermelha. Em particular a cor vermelha não pode aparecer na primeira posição da permutação. Além disso, para cada uma das demais 6 possíveis posições para a cor vermelha, existe exatamente uma maneira de posicionar as demais cores de forma que Isaac gaste apenas uma carga, já que as demais cores precisarão ser listadas na ordem do arco-íris. Isso mostra que existem exatamente 6 permutações que satisfazem a condição deste item. Logo, a probabilidade desejada é $6/7!$.

(c) No item anterior, já consideramos o caso em que a carga é usada para ir da cor vermelha para a laranja e concluímos que há 6 permutações em que isso acontece. Agora, vamos considerar cada uma das outras possibilidades de uso da carga, começando pelo caso em que ela é usada para ir do cristal laranja para o amarelo. Todos os demais saltos devem ser feitos da esquerda para a direita. Assim, a cor vermelha deve aparecer antes (à esquerda) da cor laranja e a ordem relativa entre as demais cores deve ser mantida como no arco-íris. Dessa forma, tendo escolhido quais serão as duas posições ocupadas pelas cores vermelho e laranja, as posições de todas as cores na permutação ficam determinadas. Existem $\binom{7}{2}$ maneiras de escolher as posições para o vermelho e o laranja. Porém, no caso em que elas ficam nas duas primeiras posições da permutação, não seria gasto carga para sair do laranja. Logo, exatamente $\binom{7}{2} - 1$ permutações se enquadram neste caso.

O próximo caso é quando a carga é utilizada para saltar do amarelo para o verde. Neste caso, temos $\binom{7}{3}$ possíveis escolhas para as posições das cores vermelha, laranja e amarela, sendo que uma dessas escolhas (aquela em que elas ocupam as 3 primeiras posições da permutação) inviabiliza o uso do carga para o salto do cristal amarelo para o verde; mas, para todas as demais $\binom{7}{3} - 1$ escolhas, há exatamente uma forma de posicionar todas as cores de modo a gastar apenas 1 carga.

Usando o mesmo raciocínio, há $\binom{7}{4} - 1$ permutações em que a carga é utilizada apenas para saltar da cor verde para a azul; há $\binom{7}{5} - 1$ permutações em que ela é utilizada apenas para saltar da azul para a índigo; e há $\binom{7}{6} - 1$ permutações em ela é utilizada apenas para saltar da cor índigo para a violeta.

Somando-se o número de permutações em todos esses casos, concluímos que o total de maneiras em que se usa exatamente uma carga é:

$$6 + \binom{7}{2} - 1 + \binom{7}{3} - 1 + \binom{7}{4} - 1 + \binom{7}{5} - 1 + \binom{7}{6} - 1,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + 1 &= \\
&= \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} \\
&= 2^7 - \binom{7}{0} - \binom{7}{1} \\
&= 128 - 1 - 7 \\
&= 120.
\end{aligned}$$

(Para calcular rapidamente a soma dos números binomiais acima, utilizamos o teorema das linhas do triângulo de Pascal, mas poderíamos também ter calculado cada um dos números binomiais $\binom{7}{2}, \ldots, \binom{7}{6}$ e os somado diretamente.)

Com isso, a probabilidade de usar exatamente uma carga é:

$$\frac{120}{7!} = \frac{120}{5040} = \frac{1}{42}.$$

□

2 O problema dos pontos (revisitado)

O exemplo seguinte é conhecido como o **problema dos pontos**. Já discorremos sobre ele nas duas primeiras aulas do Módulo "Introdução à Probabilidade". Aqui, veremos com mais detalhes algumas curiosidades históricas e soluções alternativas.

Muitos historiadores consideram que esse problema seja o que deu início ao estudo da Teoria das Probabilidades; ele figura na obra de um frade italiano chamado Luca Pacioli (1445-1517). Eis o seu enunciado, com os valores propostos no texto de Pacioli.

Problema 7. *Num jogo entre duas equipes, as apostas somam* 22 *ducados (uma antiga moeda) e são necessários* 60 *pontos para que uma delas seja vencedora. Se o jogo foi interrompido quando uma equipe tinha* 50 *pontos e a outra* 30*, como se deve dividir as apostas entre as duas equipes?*

Pacioli sugeriu que o valor das apostas deveria ser repartido proporcionalmente às quantidade de pontos obtidos por cada equipe, ou seja, na razão de $50 : 30$. Assim, dividir-se-ia o prêmio em 80 partes e dar-se-ia 50 partes para a equipe que obteve 50 pontos e 30 partes para a equipe que obteve 30 pontos. Neste caso a melhor equipe ficaria com $22 \cdot 50/80 = 13{,}75$ ducados e a segunda com $22 \cdot 30/80 = 8{,}25$ ducados.

Antes de continuar, pare um pouco e reflita sobre se essa divisão é justa.

O mais justo seria dividir as moedas entre as duas equipes de modo que cada uma receba um valor proporcional à probabilidade que ela possui de vencer o jogo. Isso não é o mesmo que a proporção de pontos já ganhos. Para perceber porque, considere o seguinte caso extremo: digamos que, no início de outro jogo, uma equipe estava com 1 ponto e a outra com 0 pontos, sendo que a primeira a completar 60 pontos ganharia o prêmio. Pela lógica de Pacioli, a primeira equipe deveria ficar com todo o prêmio e a segunda com nada. Contudo, o jogo ainda está muito longe de ser decidido. A primeira equipe terá um pouco mais de chance de ganhar, mas não muito mais; uma única vitória não deveria qualificar a primeira equipe a ficar com todo o prêmio. Esse caso extremo foi observado por Tartaglia, apelido de Nicolo Fontana (1500–1557), mas o próprio Tartaglia não conseguiu resolver o problema de forma contundente. Outra solução natural, mas também errada, seria dividir o prêmio de maneira inversamente proporcional ao número de pontos que faltam para cada equipe vencer.

Depois, veio Cardano (1501–1576), matemático italiano, famoso por divulgar as fórmulas de resolução de equações de terceiro grau obtidas anteriormente por Tartaglia e por Scipione del Ferro (1465–1526). Ele ridicularizou a solução de Pacioli e propôs uma nova solução. Porém, a solução de Cardano também estava errada. Finalmente os matemáticos franceses Pascal e Fermat se interessaram pelo problema e, após a troca de muitas correspondências (cartas, à época), no verão de 1654 conseguiram resolvê-lo e deram o pontapé inicial para a Teoria das Probabilidades.

A verdade é que, da forma como enunciamos acima, o problema dos pontos está incompleto. Precisamos conhecer mais sobre as regras do jogo a fim de obter uma solução. Vamos assumir algumas hipóteses de partida:

(I) O jogo é constituído de etapas, tais que em cada etapa exatamente 1 ponto é disputado e exatamente uma das duas equipes ganha esse ponto (em particular, não há empates).

(II) As etapas são independentes, de modo que o resultado de uma etapa não afeta os resultados das etapas seguintes; isso quer dizer que o fato de uma equipe ganhar um ponto não aumenta (nem diminui) suas chances de ganhar outro ponto nas etapas seguintes.

(III) As duas equipes possuem a mesma chance de ganhar um ponto em cada etapa.

A hipótese (I) faz parte da definição do próprio jogo. Se a vitória de cada etapa resultasse no acúmulo de mais (ou menos) de um ponto para o time vencedor, a probabilidade de cada time conquistar o total de pontos estipulados mudaria completamente. A possibilidade de empates também dificultaria a análise do jogo. É possível argumentar que quando um empate não dá ponto para nenhuma das equipes, ele apenas prolonga o jogo, sem mudar as chances de cada equipe vencer; porém, quando o empate distribui pontos, ainda que em igual quantidade para ambas as equipes, as probabilidades de cada uma vencer o jogo (obter o total de pontos) podem ser alteradas.

As hipóteses (II) e (III) indicam que o jogo é meramente um jogo de sorte/azar, ou seja, que não depende das habilidades das equipes. Por exemplo, os pontos são atribuídos como resultados de lançamentos aleatórios de moedas ou de dados. Assim, o fato de que em um certo instante uma equipe tenha mais pontos do que a outra não implica que ela terá mais chances de obter o próximo ponto. Além disso, o jogo é justo, pois cada equipe possui probabilidade $1/2$ de ganhar cada ponto. As análises que faremos aqui não se aplicam, por exemplo, em competições esportivas onde as habilidades das duas equipes podem ser distintas.

Vamos começar resolvendo uma versão mais simples do problema, onde menos pontos são disputados, para depois obter uma solução geral.

Problema 8 (Problema dos pontos)**.** *Em um jogo entre duas equipes, o total de apostas é de 16 ducados (uma moeda antiga). Ganha esse valor a equipe que primeiro obtiver 6 pontos em uma série de partidas, cada uma das quais valendo um ponto. O jogo precisou ser interrompido em certo momento, quando a equipe A estava com 4 pontos e a equipe B com 3 pontos. Considerando-se que são satisfeitas as condições (I) a (III) acima, como se deve dividir (de forma justa) as moedas entre as duas equipes?*

Solução 1. Vamos calcular qual a probabilidade que cada equipe possui de vencer o jogo. A equipe A precisa ganhar mais 2 pontos para vencer o jogo, enquanto que a equipe B precisa de mais 3 pontos.

A observação crucial é que o jogo terminará em no máximo 4 etapas. De fato, se nem A ganhar nem B ganhar, é porque A recebeu no máximo 1 ponto e B recebeu no máximo 2 pontos, logo, no máximo 3 etapas foram realizadas. Abaixo, listamos todas as maneiras em que A pode vencer o jogo, ou seja, ganhar duas vezes antes que B ganhe 3 vezes.

Etapa:	1ª	2ª	3ª	4ª
Maneira 1:	A	A	-	-
Maneira 2:	A	B	A	-
Maneira 3:	B	A	A	-
Maneira 4:	A	B	B	A
Maneira 5:	B	A	B	A
Maneira 6:	B	B	A	A

A Maneira 1 acontece com probabilidade $1/4$, já que A pode ganhar a primeira etapa com probabilidade $1/2$ e a segunda etapa com probabilidade $1/2$ e, como os eventos são independentes, temos probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de A ganhar ambas as etapas. Da mesma forma, as maneiras 2 e 3 acontecem, cada uma, com probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Por fim, as maneiras 4, 5 e 6, acontecem, cada uma, com probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Como essas maneiras são eventos disjuntos, devemos somas as probabilidades de cada uma delas, o que nos dá um total de:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} &= \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} = \\ &= \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} \\ &= \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

De forma complementar, a probabilidade de B ganhar o jogo é $1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$.

Assim, como o valor do prêmio em jogo é de 16 ducados, segue que A deve receber 11 ducados e B deve receber 5 ducados. $\square$

Solução Alternativa. A solução anterior tem a desvantagem de requerer que listemos todas as possibilidade em que A pode ganhar o jogo. Quando faltam muitos pontos para o jogo terminar, isso é impraticável.

Nessa solução, por simplicidade, também começaremos analisando todos os casos, mas depois veremos que é possível generalizar o argumento utilizado para resolver o problema geral.

Assim como na solução anterior, observe que o jogo termina em no máximo 4 etapas. Aqui, vamos supor que o jogo *sempre* se estende por exatamente 4 etapas, ou seja, ainda que na segunda ou na terceira etapa um dos jogadores já obtenha a quantidade de pontos necessários, as próximas etapas serão realizadas. Veja que isso não traz qualquer prejuízo, pois não é possível que em 4 etapas as duas equipes consigam obter a quantidade necessária de pontos para vencer; de fato, não é possível que tanto A ganhe 2 pontos como B ganhe 3 pontos, pois para isso seriam necessárias pelo menos 5 etapas.

A vantagem dessa maneira de pensar é obter um espaço de probabilidades no qual são considerados todos os $2^4 = 16$ possíveis resultados para as 4 etapas; então, como em cada etapa ambos os jogadores possuem a mesma chance de ganhar um ponto, essas 16 possibilidades são equiprováveis. Com isso, basta contar em quantas dessas possibilidades a equipe A ganha pelo menos dois pontos e, depois, dividir esse valor por 16 para obter a probabilidade de A ganhar o jogo.

Na tabela a seguir, listamos as 16 possibilidades e o vencedor em cada uma delas. Um rápido exame permite concluirmos que A vence em 11 possibilidades e B vence em 5, logo, a probabilidade de A vencer é $11/16$ e, como na solução anterior, A deve receber 11 ducados e B deve receber 5 ducados.

Etapa:	1ª	2ª	3ª	4ª	→ Vencedor do Jogo
	A	A	A	A	→ A
	A	A	A	B	→ A
	A	A	B	A	→ A
	A	A	B	B	→ A
	A	B	A	A	→ A
	A	B	A	B	→ A
	A	B	B	A	→ A
	A	B	B	B	→ B
	B	A	A	A	→ A
	B	A	A	B	→ A
	B	A	B	A	→ A
	B	A	B	B	→ B
	B	B	A	A	→ A
	B	B	A	B	→ B
	B	B	B	A	→ B
	B	B	B	B	→ B

Por fim, veja que poderíamos calcular quantas vezes A vence sem precisar listar todos os casos. Bastaria contar em quantas sequências da tabela a letra A aparece pelo menos 2 vezes. Esse número é igual a

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11.$$

$\square$

Finalmente, apresentamos a solução da versão geral do problema dos pontos, adaptando o argumento utilizado no último parágrafo da segunda solução acima. (Essa é a mesma solução que já havia sido exibida no Módulo "Introdução à Probabilidade".)

Problema 9. *Um jogo entre duas equipes é disputado em várias partidas, cada uma valendo um ponto. Ganha a equipe que primeiro conseguir acumular um total de T pontos. O jogo precisou ser interrompido em um momento em que a equipe A estava com p pontos e a equipe B com q pontos. Porém, considera-se que em cada partida seguinte as duas equipes teriam chances iguais de vencer. Qual a probabilidade da equipe A vencer o jogo?*

Solução. Sejam $m = T - p$ e $n = T - q$, e observe que a equipe A precisa de mais m pontos para ganhar, enquanto a equipe B precisa de mais n pontos.

Observe que o vencedor fica determinado após o resultado das próximas $m+n-1$ partidas. De fato, se após essa quantidade de partidas ainda não houvesse um vencedor, então A teria ganho no máximo $m - 1$ pontos e B teria ganho no máximo $n - 1$ pontos, de modo que no máximo $(m-1)+(n-1) = m+n-2$ pontos teriam sido disputados. Mas esse não é o caso, uma vez que $m + n - 1$ partidas jogadas distribuem $m + n - 1$ pontos.

Então, vamos considerar como espaço amostral o conjunto de todos os 2^{m+n-1} resultados possíveis para essa sequência de $m+n-1$ novas partidas. Como em cada partida A e B têm a mesma chance de ganhar, esses 2^{m+n-1} resultados são equiprováveis. Resta, pois, calcular o número de casos favoráveis, ou seja, calcular em quantas dessas sequências de partidas o jogador A vence o jogo.

Dada um sequência em particular de resultados para as $m+n-1$ partidas, seja x o número de partidas que A ganhou. Para que A vença o jogo como um todo, é necessário que $x \geq m$. Por outro lado, como o total de partidas é $m+n-1$ sempre que $x \geq m$, o número de pontos que B irá conquistar será no máximo $m+n-1-x \leq n-1$, de forma que B não terá ganho o jogo ainda. Dito de outra maneira, independentemente da ordem em que A ganhar $x \geq m$ pontos nas $m+n-1$ partidas restantes, A irá vencer o jogo. Isto posto, é imediato que há exatamente $\binom{m+n-1}{x}$ maneiras de A ganhar o jogo fazendo exatamente x pontos, onde $x \geq m$. Variando-se o valor de x de m a $m+n-1$, obtém-se que o total de maneiras em que A pode vencer o jogo é igual a:

$$\binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m+1} + \cdots + \binom{m+n-1}{m+n-1}. \quad (1)$$

Portanto, a probabilidade de A vencer o jogo é:

$$\Pr(A \text{ vencer}) = \frac{\binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m+1} + \cdots + \binom{m+n-1}{m+n-1}}{2^{n+m-1}}.$$

Por fim, é claro que substituindo os valores de m e n por $T-p$ e $T-q$, respectivamente, obtemos a resposta em função de T, p e q. $\square$

Usando a fórmula acima, podemos resolver o Problema 7, em que a equipe A possui 50 pontos, a equipe B possui 30 pontos e o objetivo é obter 60 pontos. A equipe A precisa de mais $m = 10$ pontos para vencer, enquanto B precisa de mais $n = 30$. Logo, o jogo é decidido em $n+m-1 = 39$ partidas, e a probabilidade de A vencer é:

$$\Pr(A \text{ vencer}) = \frac{\binom{39}{30} + \binom{39}{31} + \cdots + \binom{39}{38} + \binom{39}{39}}{2^{39}}.$$

Utilizando um *software* para calcular o valor da expressão acima, concluímos que $\Pr(A \text{ vencer}) = 99{,}9467\%$. Assim, A deve receber praticamente todo o prêmio.

Observação 10. *Usando o fato que* $\binom{m+n-1}{m+i} = \binom{m+n-1}{n-1-i}$, *também podemos escrever a soma* (1) *como:*

$$\binom{m+n-1}{0} + \cdots + \binom{m+n-1}{n-2} + \binom{m+n-1}{n-1}.$$

Assim,

$$\Pr(A \text{ vencer}) = \frac{\binom{m+n-1}{0} + \cdots + \binom{m+n-1}{n-2} + \binom{m+n-1}{n-1}}{2^{n+m-1}}.$$

Dicas para o Professor

Sugerimos que essa aula seja apresentada em três encontros de 50 minutos. Assumimos como pré-requisito algumas aulas do módulo Princípios Básicos de Contagem, especialmente as definições de permutações e combinações. Além disso, um dos problemas requer o estudo de uma inequação de segundo grau.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.